

Dzień 50 (czwartek 28 maja 2020)

Dziś zestawienie zbieżności różnego rodzaju ciągów, szeregów i całek¹.

Definicja zbieżności ciągu		
Rodzaj ciągu	Zapis	Definicja/Definicje
Rzeczywisty ciąg liczbowy (a_n)	$a_n \rightarrow g$	$\forall_{\varepsilon > 0} \exists N \forall n \geq N a_n - g < \varepsilon$
Zespolony ciąg liczbowy (z_n)	$z_n \rightarrow g$	$\forall_{\varepsilon > 0} \exists N \forall n \geq N z_n - g < \varepsilon$
Zbieżność jednostajna ciągu funkcyjnego (f_n)	$f_n \rightrightarrows f$	$\forall_{\varepsilon > 0} \exists N \forall n \geq N \ f_n - f\ < \varepsilon$ $\forall_{\varepsilon > 0} \exists N \forall x \in D_f \forall n \geq N f_n(x) - f(x) < \varepsilon$
Zbieżność punktowa ciągu funkcyjnego (f_n)	$f_n \rightarrow f$	$\forall_{\varepsilon > 0} \forall x \in D_f \exists N \forall n \geq N f_n(x) - f(x) < \varepsilon$ $\forall_{x \in D_f} f_n(x) \rightarrow f(x)$

Warunek konieczny zbieżności szeregu/całki		
Rodzaj szeregu/całki	Warunek	Wniosek
Rzeczywisty szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	$a_n \not\rightarrow 0$	Szereg rozbieżny
Zespolony szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$	$z_n \not\rightarrow 0$	Szereg rozbieżny
Szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$	$\ f_n\ \not\rightarrow 0$	Szereg nie jest jednostajnie zbieżny
Całka $\int_1^{\infty} f(x) dx$ Założenie: f jest ciągła na $[1, \infty)$	$\underbrace{f(x) \rightarrow g}_{x \rightarrow \infty}$ $g \neq 0$	Całka jest rozbieżna
Całka $\int_1^{\infty} f(x) dx$ Założenie: f jest ciągła na $[1, \infty)$	$\underbrace{f(x) \not\rightarrow 0}_{x \rightarrow \infty}$	Nic nie wynika, całka może być zbieżna

¹Całek niewłaściwych, rzecz jasna, bo tylko wtedy jest pytanie o zbieżność. W przypadku całek niewłaściwych w tabelkach pojawiają się również własności, o których wcześniej nie mówiliśmy (zbieżność bezwzględna, analogon szeregów naprzemiennych).

Zbieżność bezwzględna		
Rodzaj szeregu/całki	Warunek	Wnioski
Rzeczywisty szereg liczbowy	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$	Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny $\left \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n $
Zespolony szereg liczbowy	$\sum_{n=1}^{\infty} z_n < \infty$	Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny $\left \sum_{n=1}^{\infty} z_n \right \leq \sum_{n=1}^{\infty} z_n $
Szereg funkcyjny	$\sum_{n=1}^{\infty} \ f_n\ < \infty$	Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ zbieżny jednostajnie $\left\ \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right\ \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ f_n\ $
Całka $\int_a^b f(x) dx$ Założenia: $a, b \in [-\infty, \infty]$, $a < b$, f jest ciągła na (a, b)	$\int_a^b f(x) dx < \infty$	Całka $\int_a^b f(x) dx$ jest zbieżna $\left \int_a^b f(x) dx \right \leq \int_a^b f(x) dx$

Szeregi i całki o wzorze potęgowym		
Szereg/całka	Wykładnik	Zbieżność
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$	$p \leq 1$	Szereg rozbieżny
	$p > 1$	Szereg zbieżny
$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$	$p \leq 1$	Całka rozbieżna
	$p > 1$	Całka zbieżna
$\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$	$p \geq 1$	Całka rozbieżna
	$p < 1$	Całka zbieżna

Kryteria d'Alemberta i Cauchy'ego		
Rodzaj szeregu/ciągu	Warunek	Wniosek
Rzeczywisty szereg liczbowy	$\left \frac{a_{n+1}}{a_n} \right \rightarrow g \in [0, 1)$	Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny
Rzeczywisty szereg liczbowy	$\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow g \in (-1, 1)$	Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny
Zespolony szereg liczbowy	$\left \frac{z_{n+1}}{z_n} \right \rightarrow g \in [0, 1)$	Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny
Zespolony szereg liczbowy	$\frac{z_{n+1}}{z_n} \rightarrow g, \quad g < 1$	Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny
Rzeczywisty szereg liczbowy	$\left \frac{a_{n+1}}{a_n} \right \rightarrow g \in (1, \infty]$	Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny
Rzeczywisty szereg liczbowy	$\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow g, \quad g > 1$	Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny
Zespolony szereg liczbowy	$\left \frac{z_{n+1}}{z_n} \right \rightarrow g \in (1, \infty]$	Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest rozbieżny
Zespolony szereg liczbowy	$\frac{z_{n+1}}{z_n} \rightarrow g, \quad g > 1$	Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest rozbieżny
Rzeczywisty ciąg liczbowy	$\left \frac{a_{n+1}}{a_n} \right \rightarrow g \in [0, 1)$	$a_n \rightarrow 0$
Zespolony ciąg liczbowy	$\left \frac{z_{n+1}}{z_n} \right \rightarrow g \in [0, 1)$	$z_n \rightarrow 0$
Rzeczywisty ciąg liczbowy	$\left \frac{a_{n+1}}{a_n} \right \rightarrow g \in (1, \infty]$	$ a_n \rightarrow \infty$
Zespolony ciąg liczbowy	$\left \frac{z_{n+1}}{z_n} \right \rightarrow g \in (1, \infty]$	$ z_n \rightarrow \infty$
Rzeczywisty szereg liczbowy	$\sqrt[n]{ a_n } \rightarrow g \in [0, 1)$	Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny
Zespolony szereg liczbowy	$\sqrt[n]{ z_n } \rightarrow g \in [0, 1)$	Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny
Rzeczywisty szereg liczbowy	$\sqrt[n]{ a_n } \rightarrow g \in (1, \infty]$	Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny
Zespolony szereg liczbowy	$\sqrt[n]{ z_n } \rightarrow g \in (1, \infty]$	Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest rozbieżny
Rzeczywisty ciąg liczbowy	$\sqrt[n]{ a_n } \rightarrow g \in [0, 1)$	$a_n \rightarrow 0$
Zespolony ciąg liczbowy	$\sqrt[n]{ z_n } \rightarrow g \in [0, 1)$	$z_n \rightarrow 0$
Rzeczywisty ciąg liczbowy	$\sqrt[n]{ a_n } \rightarrow g \in (1, \infty]$	$ a_n \rightarrow \infty$
Zespolony ciąg liczbowy	$\sqrt[n]{ z_n } \rightarrow g \in (1, \infty]$	$ z_n \rightarrow \infty$

Szeregi naprzemienne i uogólnienia		
Rodzaj szeregu/całki	Warunki	Wniosek
Rzeczywisty szereg liczbowy	$a_n \searrow 0$	Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ jest zbieżny
Zespolony szereg liczbowy	$a_n \searrow 0$ $ z = 1, z \neq 1$	Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z^n a_n$ jest zbieżny
Całka niewłaściwa	$\underbrace{f(x) \searrow 0}_{x \rightarrow \infty}$	Całka $\int_1^{\infty} f(x) \sin x \, dx$ jest zbieżna
Całka niewłaściwa	$\underbrace{f(x) \searrow 0}_{x \rightarrow \infty}$	Całka $\int_1^{\infty} f(x) \cos x \, dx$ jest zbieżna

Kryterium porównawcze		
Rodzaj szeregu/całki	Warunki	Wniosek
Rzeczywisty szereg liczbowy	$0 \leq a_n \leq b_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$
Rzeczywisty szereg liczbowy	$0 \leq a_n \leq b_n, \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$	$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$
Całka niewłaściwa	$0 \leq f(x) \leq g(x), \int_a^b g(x) \, dx < \infty$	$\int_a^b f(x) \, dx < \infty$
Całka niewłaściwa	$0 \leq f(x) \leq g(x), \int_a^b f(x) \, dx = \infty$	$\int_a^b g(x) \, dx = \infty$

A teraz dwa zadania związane z powyższymi tabelkami.

466. Dowieść, że całka niewłaściwa

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin \sqrt{x}}{x^2} \, dx$$

jest zbieżna.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Korzystamy z kryterium zbieżności bezwzględnej dla całek niewłaściwych oraz z kryterium porównawczego dla całek niewłaściwych.

$$\int_1^{\infty} \left| \frac{\sin \sqrt{x}}{x^2} \right| dx \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx < \infty.$$

467. Jedna z własności umieszczonych w tabelkach mówi, że dla funkcji nierosnącej $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mającej w $+\infty$ granicę równą 0, całka

$$\int_1^{\infty} f(x) \sin x \, dx$$

jest zbieżna.

Udowodnić tę własność przy dodatkowym założeniu, że funkcja f jest różniczkowalna.

Wskazówka: Całkowanie przez części.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, rozwiąż powyższe zadanie, a przynajmniej podejmij próbę rozwiązania, aby wiedzieć, gdzie napotykasz trudności.

Rozwiązanie:

Wykonując całkowanie przez części otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} f(x) \sin x \, dx &= f(x)(-\cos x) \Big|_{x=1}^{\infty} - \int_1^{\infty} f'(x)(-\cos x) \, dx = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)(-\cos x) - f(1)(-\cos 1) + \int_1^{\infty} f'(x) \cos x \, dx.\end{aligned}$$

Granica

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)(-\cos x)$$

istnieje i jest równa 0, co wynika z twierdzenia o trzech funkcjach i oszacowań

$$0 \leq |f(x)(-\cos x)| \leq f(x) \rightarrow 0 \quad \text{przy } x \rightarrow \infty.$$

Natomiast całka

$$\int_1^{\infty} f'(x) \cos x \, dx$$

jest zbieżna na mocy kryterium zbieżności bezwzględnej oraz kryterium porównawczego dla całek niewłaściwych ²:

$$\int_1^{\infty} |f'(x) \cos x| \, dx \leq \int_1^{\infty} |f'(x)| \, dx = \int_1^{\infty} -f'(x) \, dx = -f(x) \Big|_{x=1}^{\infty} = -\underbrace{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)}_{=0} + f(1) = f(1).$$

²Trzeba też zauważyć, że skoro f jest nierosnąca, to $f'(x) \leq 0$.