

Wyznaczyć promień zbieżności szeregu Maclaurina (czyli szeregu Taylora w zerze) funkcji f określonej podanym wzorem

$$411. f(x) = \sqrt{x+2} \quad 412. f(x) = \frac{1}{x+3} \quad 413. f(x) = \ln(x+e) \quad 414. f(x) = \sqrt[3]{x+27}$$

415. Wyprowadzić wzór na sumę szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot x^n.$$

Wyliczyć na tej podstawie sumy szeregów liczbowych

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}.$$

Przypomnienie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n = \frac{x}{(1-x)^2} \quad \text{dla} \quad x \in (-1, 1).$$

416. Wyprowadzić wzór na sumę szeregu potęgowego¹

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n \cdot x^n,$$

gdzie (F_n) jest ciągiem Fibonacciego numerowanym tak, że $F_1 = F_2 = 1$. Wyliczyć na tej podstawie sumę szeregu liczbowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{2^n}.$$

Wskazówka: Oznaczyć sumę szeregu przez $f(x)$ i spróbować zmaistrować coś z $f(x)$, $x \cdot f(x)$ oraz $x^2 \cdot f(x)$.

417. Wyprowadzić wzór na sumę szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot (n+1)}.$$

Wyliczyć² wartość sumy szeregu na końcach przedziału zbieżności.

Przypomnienie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) \quad \text{dla} \quad x \in [-1, 1).$$

¹Osobnym problemem jest wyznaczenie przedziału zbieżności tego szeregu. Ponieważ nie jest moją intencją robienie tego tu i teraz, przyjmujemy bez dowodu, że przedziałem zbieżności jest przedział $\left(-\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.

²Wyliczyć tę sumę dowolnym sposobem — można skorzystać z wyprowadzonego w ramach rozwiązywania zadania wzoru na sumę szeregu, a można wysumować szereg po podstawieniu za x końca przedziału zbieżności.