

468. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_0^3 15x \cdot \sqrt{x+1} dx$ podając wynik w postaci liczby całkowitej.

Rozwiązanie:

Wykonujemy podstawienie

$$t = \sqrt{x+1}, \quad x = t^2 - 1$$

i formalnie

$$dx = 2t dt.$$

Ponadto $x=0$ odpowiada $t=1$, a $x=3$ odpowiada $t=2$, przy czym zależność t od x jest monotoniczna. Stąd wynika, że przedział całkowania $x \in [0, 3]$ odpowiada przedziałowi $t \in [1, 2]$.

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_0^3 15x \cdot \sqrt{x+1} dx &= \int_1^2 15 \cdot (t^2 - 1) \cdot t \cdot 2t dt = 30 \cdot \int_1^2 t^4 - t^2 dt = 30 \cdot \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_{t=1}^2 = \\ &= 30 \cdot \left(\frac{32-1}{5} - \frac{8-1}{3} \right) = 6 \cdot 31 - 10 \cdot 7 = 186 - 70 = 116. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość 116.

469. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_0^1 \frac{x dx}{x^2 - 2x + 2}$. Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

Rozwiązanie:

Przekształcamy mianownik funkcji podcałkowej

$$\int_0^1 \frac{x dx}{x^2 - 2x + 2} = \int_0^1 \frac{x dx}{x^2 - 2x + 1 + 1} = \int_0^1 \frac{x dx}{(x-1)^2 + 1},$$

a następnie wykonujemy podstawienie

$$t = x - 1, \quad x = t + 1$$

i formalnie

$$dx = dt.$$

Ponadto $x=0$ odpowiada $t=-1$, a $x=1$ odpowiada $t=0$, przy czym zależność t od x jest monotoniczna. Stąd wynika, że przedział całkowania $x \in [0, 1]$ odpowiada przedziałowi $t \in [-1, 0]$.

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x dx}{(x-1)^2 + 1} &= \int_{-1}^0 \frac{(t+1) dt}{t^2 + 1} = \int_{-1}^0 \frac{t dt}{t^2 + 1} + \int_{-1}^0 \frac{dt}{t^2 + 1} = \\ &= \left(\frac{\ln(t^2 + 1)}{2} \right) \Big|_{t=-1}^0 + \left(\arctg t \right) \Big|_{t=-1}^0 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\ln 1}{2} - \frac{\ln 2}{2} + \operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg}(-1) = 0 - \frac{\ln 2}{2} + 0 - \frac{-\pi}{4} = \\
&= -\frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość $-\frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4}$.

470. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int \frac{dx}{x^3 - x^2}$.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{1}{x^3 - x^2} = \frac{1}{(x-1) \cdot x^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x^2} + \frac{D}{x},$$

$$1 = A \cdot x^2 + B \cdot (x-1) + D \cdot (x-1) \cdot x,$$

$$1 = Ax^2 + Bx - B + Dx^2 - Dx,$$

$$\begin{cases} 0 &= A + D \\ 0 &= B - D \\ 1 &= -B, \end{cases}$$

skąd $B = -1$, $D = -1$ i $A = 1$. W konsekwencji

$$\int \frac{dx}{x^3 - x^2} = \int \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} dx = \ln|x-1| + \frac{1}{x} - \ln|x| + C.$$

471. Obliczyć wartość granicy (ciągu)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^3 + 1} + \frac{4}{n^3 + 8} + \frac{9}{n^3 + 27} + \dots + \frac{k^2}{n^3 + k^3} + \dots + \frac{4n^2}{n^3 + 8n^3} \right).$$

Rozwiązanie:

Przekształcenie danej w zadaniu granicy prowadzi do

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{k^2}{n^3 + k^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{2n} \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right),$$

gdzie

$$f(x) = \frac{x^2}{1 + x^3}.$$

Ponieważ uzyskana granica jest granicą ciągu sum Riemanna dla funkcji ciągłej f na przedziale $[0, 2]$ odpowiadających podziałom tego przedziału na $2n$ przedziałów długości $1/n$, możemy zapisać jej wartość w postaci podanej niżej całki oznaczonej. Korzystając ze wzoru

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln|g(x)| + C$$

obliczamy wartość tej całki:

$$\int_0^2 \frac{x^2 dx}{x^3+1} = \frac{1}{3} \cdot \int_0^2 \frac{3x^2 dx}{x^3+1} = \frac{1}{3} \cdot \ln|x^3+1| \Big|_{x=0}^2 = \frac{1}{3} \cdot (\ln 9 - \ln 1) = \frac{2\ln 3}{3}.$$

Odpowiedź: Podana granica ma wartość $\frac{2\ln 3}{3}$.

472. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_0^{\sqrt{3}} x^3 \cdot \operatorname{arctg} x dx$. Doprowadzić wynik do postaci $w \cdot \pi$, gdzie w liczbą wymierną.

Rozwiązanie:

Całkując przez części otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{3}} x^3 \cdot \operatorname{arctg} x dx &= \frac{x^4}{4} \cdot \operatorname{arctg} x \Big|_{x=0}^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{9}{4} \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{3} - \frac{1}{4} \cdot \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^4 - 1 + 1}{1+x^2} dx = \\ &= \frac{9}{4} \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{4} \cdot \int_0^{\sqrt{3}} x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arctg} x \Big|_{x=0}^{\sqrt{3}} \right) = \\ &= \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{4} \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{3} + \operatorname{arctg} \sqrt{3}) = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{12} = \frac{8\pi}{12} = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość $\frac{2\pi}{3}$.

473. Udowodnić zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^{2017} n^{2016}}{n^{2/3} + n^{3/2}}$.

Rozwiązanie:

Skorzystamy z kryterium zbieżności bezwzględnej oraz z kryterium porównawczego:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin^{2017} n^{2016}}{n^{2/3} + n^{3/2}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin^{2017} n^{2016}|}{n^{2/3} + n^{3/2}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3} + n^{3/2}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{0 + n^{3/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty,$$

bo $3/2 > 1$.

474. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int e^{2x} \cdot \sin 3x dx$.

Rozwiązanie:

Oznaczamy daną całkę przez $I(x)$ i całkujemy dwukrotnie przez części:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int e^{2x} \cdot \sin 3x dx = \frac{e^{2x}}{2} \cdot \sin 3x - \int \frac{e^{2x}}{2} \cdot 3 \cos 3x dx = \frac{e^{2x} \cdot \sin 3x}{2} - \frac{3}{2} \cdot \int e^{2x} \cdot \cos 3x dx = \\ &= \frac{e^{2x} \cdot \sin 3x}{2} - \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{e^{2x}}{2} \cdot \cos 3x - \int \frac{e^{2x}}{2} \cdot (-3 \sin 3x) dx \right) = \\ &= \frac{e^{2x} \cdot \sin 3x}{2} - \frac{3 \cdot e^{2x} \cdot \cos 3x}{4} - \frac{9}{4} \cdot \int e^{2x} \cdot \sin 3x dx = \frac{e^{2x} \cdot \sin 3x}{2} - \frac{3 \cdot e^{2x} \cdot \cos 3x}{4} - \frac{9}{4} \cdot I(x), \end{aligned}$$

co prowadzi do

$$4 \cdot I(x) = 2 \cdot e^{2x} \cdot \sin 3x - 3 \cdot e^{2x} \cdot \cos 3x - 9 \cdot I(x),$$

skąd

$$I(x) = \frac{2 \cdot e^{2x} \cdot \sin 3x - 3 \cdot e^{2x} \cdot \cos 3x}{13} + C.$$

475. Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8^n + n^{11}}}{\sqrt{4^n + n^{9999}}}.$$

Rozwiązanie:

Stosując kryterium d'Alemberta lub Cauchy'ego dla ciągów otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{11}}{8^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{9999}}{4^n} = 0.$$

Standardowe rachunki są tu pominięte, ale w rozwiązaniu muszą się znaleźć wraz z powołaniem się na odpowiednie kryterium.

Wobec tego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8^n + n^{11}}}{\sqrt{4^n + n^{9999}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{n^{11}}{8^n}}}{2^n \cdot \sqrt{1 + \frac{n^{9999}}{4^n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{n^{11}}{8^n}}}{\sqrt{1 + \frac{n^{9999}}{4^n}}} = \frac{\sqrt[3]{1+0}}{\sqrt{1+0}} = 1.$$

476. Funkcja różniczkowalna $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ma pochodną daną wzorem $f'(x) = |x|$. Ponadto wiadomo, że $f(-1) = -1$. Wyznaczyć $f(1)$.

Rozwiązanie:

Ponieważ

$$f'(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \in (-\infty, 0) \\ x & \text{dla } x \in [0, +\infty) \end{cases}$$

otrzymujemy

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + C & \text{dla } x \in (-\infty, 0) \\ \frac{x^2}{2} + D & \text{dla } x \in [0, +\infty) \end{cases}$$

Przy tym ciągłość funkcji f w punkcie 0 wymaga zgodności wartości określonych podanymi wyżej wzorami dla $x=0$, czyli musi zachodzić równość $C=D$.

Warunek $f(-1) = -1$ sprowadza się do $C = -1/2$.

Ostatecznie

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} & \text{dla } x \in (-\infty, 0) \\ \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} & \text{dla } x \in [0, +\infty) \end{cases}$$

Zatem $f(1) = 0$.

477. Obliczyć całkę oznaczoną $\int_1^{64} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$.

Rozwiązanie:

Wykonując podstawienie $x = t^6$ i formalnie $dx = 6t^5 dt$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int_1^{64} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} &= \int_1^2 \frac{6t^5 dt}{t^3 + t^2} = 6 \cdot \int_1^2 \frac{t^3 dt}{t+1} = 6 \cdot \int_1^2 \frac{t^3+1}{t+1} - \frac{1}{t+1} dt = 6 \cdot \int_1^2 t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} dt = \\ &= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln|t+1| \Big|_{t=1}^2 = 16 - 12 + 12 - 6\ln 3 - 2 + 3 - 6 + 6\ln 2 = 11 - 6\ln 3 + 6\ln 2. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość $11 - 6\ln 3 + 6\ln 2 = 11 + 6\ln \frac{2}{3}$.

478. Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p \cdot \sum_{k=1}^{55n} \sqrt{\sqrt{n} + \sqrt{9n+k}}$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej parametru p , aby granica ta była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Przekształcamy sumę występującą pod znakiem granicy:

$$\begin{aligned} n^p \cdot \sum_{k=1}^{55n} \sqrt{\sqrt{n} + \sqrt{9n+k}} &= n^{p+1} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{55n} \sqrt{\sqrt{n} + \sqrt{9n+k}} = n^{p+5/4} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{55n} \sqrt{1 + \sqrt{9 + \frac{k}{n}}} = \\ &= n^{p+5/4} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{55n} f\left(\frac{k}{n}\right), \end{aligned}$$

gdzie $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{9+x}}$.

Ponieważ funkcja f jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągowi podziałów przedziału całkowania na $55n$ przedziałów równej długości $1/n$ dążą do całki oznaczonej, przy obliczaniu której korzystamy z podstawienia $t = \sqrt{1 + \sqrt{9+x}}$, czyli $x = (t^2 - 1)^2 - 9 = t^4 - 2t^2 - 8$ i formalnie $dx = (4t^3 - 4t) dt$.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{55n} f\left(\frac{k}{n}\right) &= \int_0^{55} f(x) dx = \int_0^{55} \sqrt{1 + \sqrt{9+x}} dx = \int_2^3 t \cdot (4t^3 - 4t) dt = 4 \cdot \int_2^3 t^4 - t^2 dt = \\ &= 4 \cdot \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_{t=2}^3 = 4 \cdot \left(\frac{243-32}{5} - \frac{27-8}{3} \right) = 4 \cdot \left(\frac{211}{5} - \frac{19}{3} \right) = 4 \cdot \frac{633-95}{15} = 4 \cdot \frac{538}{15} = \\ &= \frac{2152}{15}. \end{aligned}$$

Powyższa wartość będzie granicą rozważanego w zadaniu ciągu, o ile wykładnik w wyrażeniu $n^{p+5/4}$ będzie równy 0, czyli dla $p = -5/4$.

Odpowiedź: Dla $p = -5/4$ dana w zadaniu granica ciągu jest równa $2152/15$.