

479. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int x^2 \cdot \sqrt[3]{x+1} \, dx .$$

480. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_1^e x^2 \cdot \ln x \, dx .$$

481. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k^2} .$$

482. Wiadomo, że dla funkcji różniczkowalnej $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $0 \leq a < b$, pole powierzchni powstałej przez obrót krzywej

$$\{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}$$

wokół osi OY jest równe

$$2\pi \cdot \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx .$$

Wyznaczyć pole powierzchni

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z \leq 1\} .$$

483. Funkcja ciągła $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna na zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, a jej pochodna drugiego rzędu jest dana wzorem

$$f''(x) = 2 \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{3\} .$$

Ponadto wiadomo, że $f(x) = x$ dla $x \in \{0, 2, 4\}$. Wyznaczyć $f(5)$.

484. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_1^9 \operatorname{arctg} \sqrt[4]{x} \, dx .$$

Pamiętaj o uproszczeniu wyniku.

485. Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p \cdot \left(\sqrt[3]{n+1} + \sqrt[3]{n+2} + \sqrt[3]{n+3} + \sqrt[3]{n+4} + \dots + \sqrt[3]{8n-2} + \sqrt[3]{8n-1} + \sqrt[3]{8n} \right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej parametru p , aby granica ta była dodatnia i skończona.

486. W każdym z zadań **486.1-486.5** podaj w postaci uproszczonej normę supremum funkcji f określonej podanym wzorem w podanej dziedzinie.

Przypomnienie: $\|f\| = \sup \{|f(x)| : x \in D_f\}$.

486.1. $f(x) = x^2 - 5$, $D_f = (-1, 3)$, $\|f\| =$

486.2. $f(x) = x^3 - 15$, $D_f = (-1, 3)$, $\|f\| =$

486.3. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 5}$, $D_f = \mathbb{R}$, $\|f\| =$

486.4. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 5}$, $D_f = \mathbb{R}$, $\|f\| =$

486.5. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 5x + 7}$, $D_f = \mathbb{R}$, $\|f\| =$

487. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_1^3 \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x^2 - 4x + 4}}.$$

Doprowadzić wynik do postaci niezawierającej „arctg”.

488. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4 + 4}.$$

Wskazówka: $n^4 + 4 = (n^2 - 2n + 2) \cdot (n^2 + 2n + 2)$.

489. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \frac{1}{36} + \frac{1}{49} - \frac{1}{64} + \frac{1}{81} - \frac{1}{100} + \frac{1}{121} - \frac{1}{144} + \frac{1}{169} - \dots$$

Wolno skorzystać bez dowodu z równości

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$