

479. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int x^2 \cdot \sqrt[3]{x+1} \, dx.$$

Rozwiązanie:

Wykonując podstawienie $t = \sqrt[3]{x+1}$, czyli $x = t^3 - 1$ i formalnie $dx = 3t^2 dt$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int x^2 \cdot \sqrt[3]{x+1} \, dx &= \int (t^3 - 1)^2 \cdot t \cdot 3t^2 \, dt = 3 \cdot \int t^9 - 2t^6 + t^3 \, dt = 3 \cdot \left(\frac{t^{10}}{10} - \frac{2t^7}{7} + \frac{t^4}{4} \right) + C = \\ &= \frac{3t^{10}}{10} - \frac{6t^7}{7} + \frac{3t^4}{4} + C = \frac{3 \cdot (x+1)^{10/3}}{10} - \frac{6 \cdot (x+1)^{7/3}}{7} + \frac{3 \cdot (x+1)^{4/3}}{4} + C. \end{aligned}$$

Uwaga: Można też całkować przez części.

480. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_1^e x^2 \cdot \ln x \, dx.$$

Rozwiązanie:

Wykonując całkowanie przez części otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int_1^e x^2 \cdot \ln x \, dx &= \frac{x^3}{3} \cdot \ln x \Big|_{x=1}^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \cdot \int_1^e x^2 \, dx = \frac{e^3}{3} - \left(\frac{x^3}{9} \Big|_{x=1}^e \right) = \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość $\frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9}$.

481. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k^2}.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy sumę występującą pod znakiem granicy:

$$\sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k^2} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1+k/n}{1+(k/n)^2} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right),$$

gdzie $f(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$.

Ponieważ funkcja f jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągowi podziałów przedziału całkowania na przedziały równej długości dążą do całki oznaczonej:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) &= \int_0^1 f(x) \, dx = \int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2} \, dx = \arctg x + \frac{\ln(1+x^2)}{2} \Big|_{x=0}^1 = \\ &= \arctg 1 + \frac{\ln 2}{2} - \arctg 0 - \frac{\ln 2}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}. \end{aligned}$$

Otrzymujemy więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k^2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}.$$

482. Wiadomo, że dla funkcji różniczkowalnej $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $0 \leq a < b$, pole powierzchni powstałej przez obrót krzywej

$$\{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}$$

wokół osi OY jest równe

$$2\pi \cdot \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Wyznaczyć pole powierzchni

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z \leq 1\}.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ dana w zadaniu paraboloida obrotowa powstaje przez obrót wokół osi OZ łuku paraboli o równaniu $z = x^2$, $0 \leq x \leq 1$, umieszczonego w płaszczyźnie XZ , przyjmijmy w podanym wzorze $f(x) = x^2$, $a = 0$, $b = 1$.

Biorąc pod uwagę, że $f'(x) = 2x$ oraz wykonując po drodze podstawienie $t = 1 + 4x^2$, czyli formalnie $dt = 8x dx$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} 2\pi \cdot \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx &= 2\pi \cdot \int_0^1 x \cdot \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{\pi}{4} \cdot \int_1^5 \sqrt{t} dt = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot t^{3/2} \Big|_{t=1}^5 = \frac{\pi}{6} \cdot t^{3/2} \Big|_{t=1}^5 = \\ &= \frac{\pi}{6} \cdot 5^{3/2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \cdot (5\sqrt{5} - 1). \end{aligned}$$

Odpowiedź: Pole danej w zadaniu powierzchni obrotowej jest równe $\frac{\pi}{6} \cdot (5\sqrt{5} - 1)$.

483. Funkcja ciągła $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna na zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, a jej pochodna drugiego rzędu jest dana wzorem

$$f''(x) = 2 \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}.$$

Ponadto wiadomo, że $f(x) = x$ dla $x \in \{0, 2, 4\}$. Wyznaczyć $f(5)$.

Rozwiązanie:

Ponieważ

$$\frac{d^2}{dx^2} x^2 = 2,$$

a funkcjami o drugiej pochodnej równej 0 są funkcje liniowe, funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + Ax + B & \text{dla } x \in (-\infty, 3) \\ x^2 + Cx + D & \text{dla } x \in [3, +\infty) \end{cases} \quad (*)$$

Przy tym ciągłość funkcji f w punkcie 3 wymaga zgodności wartości określonych podanymi wyżej wzorami dla $x = 3$, czyli musi zachodzić równość

$$3A + B = 3C + D. \quad (\clubsuit)$$

Warunki $f(x) = x$ dla $x \in \{0, 2, 4\}$ sprowadzają się odpowiednio do

$$0 = B, \quad (\diamond)$$

$$2 = 4 + 2A + B, \quad (\heartsuit)$$

$$4 = 16 + 4C + D. \quad (\spadesuit)$$

Rozwiązanie układu otrzymanych czterech równań ($\clubsuit$), ($\diamond$), ($\heartsuit$) i ($\spadesuit$) prowadzi do

$$A = -1, \quad B = 0, \quad C = -9, \quad D = 24.$$

Ostatecznie

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{dla } x \in (-\infty, 3) \\ x^2 - 9x + 24 & \text{dla } x \in [3, +\infty) \end{cases} \quad (**)$$

Zatem $f(5) = 4$.

484. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_1^9 \operatorname{arctg} \sqrt[4]{x} \, dx.$$

Pamiętaj o uproszczeniu wyniku.

Rozwiązanie:

Podstawiamy $x = t^4$, czyli formalnie $dx = 4t^3 \, dt$:

$$\int_1^9 \operatorname{arctg} \sqrt[4]{x} \, dx = \int_1^{\sqrt[4]{9}} 4t^3 \cdot \operatorname{arctg} t \, dt.$$

Następnie wykonujemy całkowanie przez części:

$$\begin{aligned} \int_1^{\sqrt[4]{9}} 4t^3 \cdot \operatorname{arctg} t \, dt &= t^4 \cdot \operatorname{arctg} t \Big|_{t=1}^{\sqrt[4]{9}} - \int_1^{\sqrt[4]{9}} \frac{t^4}{t^2+1} \, dt = \\ &= 9 \cdot \operatorname{arctg} \sqrt[4]{9} - \operatorname{arctg} 1 - \int_1^{\sqrt[4]{9}} \frac{t^4 - 1 + 1}{t^2+1} \, dt = 9 \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} - \int_1^{\sqrt[4]{9}} t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1} \, dt = \\ &= 3\pi - \frac{\pi}{4} - \left(\frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arctg} t \Big|_{t=1}^{\sqrt[4]{9}} \right) = \\ &= 3\pi - \frac{\pi}{4} - \left(\frac{3 \cdot \sqrt[4]{9}}{3} - \sqrt[4]{9} + \operatorname{arctg} \sqrt[4]{9} - \frac{1}{3} + 1 - \operatorname{arctg} 1 \right) = \\ &= 3\pi - \frac{\pi}{4} - \sqrt[4]{9} + \sqrt[4]{9} - \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3} + \frac{\pi}{4} = 3\pi - \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3} = \frac{8\pi}{3} - \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość $\frac{8\pi}{3} - \frac{2}{3}$.

485. Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p \cdot \left(\sqrt[3]{n+1} + \sqrt[3]{n+2} + \sqrt[3]{n+3} + \sqrt[3]{n+4} + \dots + \sqrt[3]{8n-2} + \sqrt[3]{8n-1} + \sqrt[3]{8n} \right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej parametru p , aby granica ta była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Przekształcamy sumę występującą pod znakiem granicy:

$$\sum_{k=1}^{7n} n^p \cdot \sqrt[3]{n+k} = n^{p+1} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{7n} \sqrt[3]{n+k} = n^{p+4/3} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{7n} \sqrt[3]{1 + \frac{k}{n}} = n^{p+4/3} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{7n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right),$$

gdzie $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Ponieważ funkcja f jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągowi podziałów przedziału całkowania na $7n$ przedziałów równej długości $1/n$ dążą do całki oznaczonej:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{7n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right) = \int_1^8 f(x) dx = \int_1^8 \sqrt[3]{x} dx = \frac{3}{4} \cdot x^{4/3} \Big|_{x=1}^8 = \frac{3}{4} \cdot 16 - \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \cdot 15 = \frac{45}{4}.$$

Powyższa wartość będzie granicą rozważanego w zadaniu ciągu, o ile wykładnik w wyrażeniu $n^{p+4/3}$ będzie równy 0, czyli dla $p = -4/3$.

Odpowiedź: Dla $p = -4/3$ dana w zadaniu granica ciągu jest równa $45/4$.

486. W każdym z zadań **486.1-486.5** podaj w postaci uproszczonej normę supremum funkcji f określonej podanym wzorem w podanej dziedzinie.

Przypomnienie: $\|f\| = \sup \{|f(x)| : x \in D_f\}$.

486.1. $f(x) = x^2 - 5$, $D_f = (-1, 3)$, $\|f\| = 5$

486.2. $f(x) = x^3 - 15$, $D_f = (-1, 3)$, $\|f\| = 16$

486.3. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 5}$, $D_f = \mathbb{R}$, $\|f\| = 1/4$

486.4. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 5}$, $D_f = \mathbb{R}$, $\|f\| = 1$

486.5. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 5x + 7}$, $D_f = \mathbb{R}$, $\|f\| = 4/3$

487. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_1^3 \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x^2 - 4x + 4}}.$$

Doprowadzić wynik do postaci niezawierającej „arctg”.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że

$$\int_1^3 \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x^2 - 4x + 4}} = \int_1^3 \frac{dx}{1 + (\sqrt[3]{x-2})^2}$$

i wykonujemy podstawienie $t = \sqrt[3]{x-2}$, czyli $x = t^3 + 2$ i formalnie $dx = 3t^2 dt$. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{dx}{1 + (\sqrt[3]{x-2})^2} &= \int_{-1}^1 \frac{3t^2 dt}{1+t^2} = 3 \cdot \int_{-1}^1 \frac{t^2 + 1 - 1}{1+t^2} dt = 3 \cdot \int_{-1}^1 dt - 3 \cdot \int_{-1}^1 \frac{dt}{1+t^2} = \\ &= 6 - 3 \cdot \left(\operatorname{arctgt} \Big|_{t=-1}^1 \right) = 6 - 3 \cdot \operatorname{arctg} 1 + 3 \cdot \operatorname{arctg}(-1) = 6 - 3 \cdot \frac{\pi}{4} + 3 \cdot \frac{-\pi}{4} = 6 - \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość $6 - \frac{3\pi}{2}$.

488. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4 + 4}.$$

Wskazówka: $n^4 + 4 = (n^2 - 2n + 2) \cdot (n^2 + 2n + 2)$.

Rozwiązanie:

Rozłóżmy na ułamki proste wyraz ogólny szeregu:

$$\frac{n}{n^4 + 4} = \frac{n}{(n^2 - 2n + 2) \cdot (n^2 + 2n + 2)} = \frac{An + B}{n^2 - 2n + 2} + \frac{Cn + D}{n^2 + 2n + 2},$$

$$n = (An + B) \cdot (n^2 + 2n + 2) + (Cn + D) \cdot (n^2 - 2n + 2),$$

$$n = An^3 + 2An^2 + 2An + Bn^2 + 2Bn + 2B + Cn^3 - 2Cn^2 + 2Cn + Dn^2 - 2Dn + 2D,$$

$$\begin{cases} 0 &= 2B + 2D, & (n^0) \\ 1 &= 2A + 2B + 2C - 2D, & (n^1) \\ 0 &= 2A + B - 2C + D, & (n^2) \\ 0 &= A + C. & (n^3) \end{cases}$$

Z pierwszego i czwartego równania dostajemy odpowiednio $D = -B$ oraz $C = -A$, co prowadzi kolejno do

$$\begin{cases} 1 &= 2A + 2B - 2A + 2B, \\ 0 &= 2A + B + 2A - B, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 &= 4B, \\ 0 &= 4A, \end{cases}$$

$$B = 1/4, \quad D = -1/4, \quad A = C = 0.$$

Zatem

$$\frac{n}{n^4+4} = \frac{1/4}{n^2-2n+2} - \frac{1/4}{n^2+2n+2} = \frac{1/4}{(n-1)^2+1} - \frac{1/4}{(n+1)^2+1}.$$

W konsekwencji sumy częściowe danego szeregu wyrażają się wzorem

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{n}{n^4+4} &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{1/4}{(n-1)^2+1} - \frac{1/4}{(n+1)^2+1} \right) = \\ &= \left(\frac{1/4}{0^2+1} - \frac{1/4}{2^2+1} \right) + \left(\frac{1/4}{1^2+1} - \frac{1/4}{3^2+1} \right) + \left(\frac{1/4}{2^2+1} - \frac{1/4}{4^2+1} \right) + \dots \\ &\dots + \left(\frac{1/4}{(N-3)^2+1} - \frac{1/4}{(N-1)^2+1} \right) + \left(\frac{1/4}{(N-2)^2+1} - \frac{1/4}{N^2+1} \right) + \\ &+ \left(\frac{1/4}{(N-1)^2+1} - \frac{1/4}{(N+1)^2+1} \right) = \frac{1/4}{0^2+1} + \frac{1/4}{1^2+1} - \frac{1/4}{N^2+1} - \frac{1/4}{(N+1)^2+1} \rightarrow \frac{3}{8} \end{aligned}$$

przy $N \rightarrow \infty$.

Odpowiedź: Suma danego szeregu jest równa $3/8$.

489. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \frac{1}{36} + \frac{1}{49} - \frac{1}{64} + \frac{1}{81} - \frac{1}{100} + \frac{1}{121} - \frac{1}{144} + \frac{1}{169} - \dots$$

Wolno skorzystać bez dowodu z równości

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ dany szereg jest bezwzględnie zbieżny, możemy beztrudno zmieniać kolejność jego wyrazów, a nawet rozdzielać go na sumę dwóch szeregów. W konsekwencji otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} - 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Suma szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ jest równa $\frac{\pi^2}{12}$.