

490. Udowodnić zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (4n-3) \cdot (4n+1)}{(3n-2) \cdot (3n+1) \cdot (3n+4)}.$$

Rozwiązanie:

Aby udowodnić zbieżność szeregu danego w treści zadania, skorzystamy z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

W tym celu musimy zweryfikować prawdziwość trzech założeń tego kryterium.

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne - oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.

Sprawdzamy to następująco:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n-3) \cdot (4n+1)}{(3n-2) \cdot (3n+1) \cdot (3n+4)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(4 - \frac{3}{n}\right) \cdot \left(4 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}}{\left(3 - \frac{2}{n}\right) \cdot \left(3 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(3 + \frac{4}{n}\right)} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 0}{3 \cdot 3 \cdot 3} = 0.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

Ten warunek jest najmniej oczywisty. Aby go udowodnić, powinniśmy wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{(4n-3) \cdot (4n+1)}{(3n-2) \cdot (3n+1) \cdot (3n+4)} \geq \frac{(4n+1) \cdot (4n+5)}{(3n+1) \cdot (3n+4) \cdot (3n+7)},$$

co kolejno jest równoważne nierównościom

$$\begin{aligned} \frac{4n-3}{3n-2} &\geq \frac{4n+5}{3n+7}, \\ (4n-3) \cdot (3n+7) &\geq (4n+5) \cdot (3n-2), \\ 12n^2 + 28n - 9n - 21 &\geq 12n^2 - 8n + 15n - 10, \\ 12n^2 + 19n - 21 &\geq 12n^2 + 7n - 10, \\ 12n &\geq 11, \end{aligned}$$

skąd wynika, że dowodzona nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n .

W konsekwencji szereg dany w treści zadania jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

491. Funkcja $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x) = \int_1^x (\log_2 t - 3)^{2017} dt.$$

Wyznaczyć punkt, w którym f osiąga najmniejszą wartość.

Rozwiązanie:

Ponieważ $f'(x) = (\log_2 x - 3)^{2017}$, mamy $f'(x) < 0$ dla $x \in (1, 8)$ oraz $f'(x) > 0$ dla $x > 8$. Stąd wniosek, że funkcja f jest malejąca w przedziale $(1, 8)$ i rosnąca w przedziale $(8, +\infty)$, a zatem osiąga najmniejszą wartość w punkcie 8.

Odpowiedź: Dana w zadaniu funkcja osiąga najmniejszą wartość w punkcie 8.

492. W każdym z zadań **492.1-492.20** podaj sumę szeregu (może być liczbą rzeczywistą albo jednym z symboli $+\infty$ i $-\infty$).

Niech $a_n = \frac{6}{n}$. Wówczas:

$$\mathbf{492.1.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$$

$$\mathbf{492.2.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^{a_n} = +\infty$$

$$\mathbf{492.3.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = \mathbf{6}$$

$$\mathbf{492.4.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+2}) = \mathbf{9}$$

$$\mathbf{492.5.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+3}) = \mathbf{11}$$

$$\mathbf{492.6.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_{n+2}) = \mathbf{3}$$

$$\mathbf{492.7.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_{n+3}) = \mathbf{5}$$

$$\mathbf{492.8.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+2} - a_{n+3}) = \mathbf{2}$$

$$\mathbf{492.9.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - a_{n+1}^2) = \mathbf{36}$$

$$\mathbf{492.10.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - a_{n+2}^2) = \mathbf{45}$$

$$\mathbf{492.11.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - a_{n+3}^2) = \mathbf{49}$$

$$\mathbf{492.12.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1}^2 - a_{n+2}^2) = \mathbf{9}$$

$$\mathbf{492.13.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1}^2 - a_{n+3}^2) = \mathbf{13}$$

$$\mathbf{492.14.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+2}^2 - a_{n+3}^2) = \mathbf{4}$$

$$\mathbf{492.15.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}) = \mathbf{63}$$

$$\mathbf{492.16.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (2^{a_n} - 2^{a_{n+2}}) = \mathbf{70}$$

$$\mathbf{492.17.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (2^{a_n} - 2^{a_{n+3}}) = \mathbf{73}$$

$$\mathbf{492.18.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (2^{a_{n+1}} - 2^{a_{n+2}}) = \mathbf{7}$$

$$\mathbf{492.19.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (2^{a_{n+1}} - 2^{a_{n+3}}) = \mathbf{10}$$

$$\mathbf{492.20.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (2^{a_{n+2}} - 2^{a_{n+3}}) = \mathbf{3}$$

493. W każdym z zadań **493.1-493.14** podaj sumę szeregu w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

Niech $a_n = \frac{n^2}{2^n}$. Wiadomo, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = 6.$$

Wobec tego:

493.1.	$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1}) = \mathbf{23/2}$
493.2.	$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+2}) = \mathbf{21/2}$
493.3.	$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = \mathbf{1/2}$
493.4.	$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+2}) = \mathbf{3/2}$
493.5.	$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - a_{n+1}^2) = \mathbf{1/4}$
493.6.	$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - a_{n+2}^2) = \mathbf{5/4}$
493.7.	$\sum_{n=1}^{\infty} (4^{a_n} - 4^{a_{n+1}}) = \mathbf{1}$
493.8.	$\sum_{n=1}^{\infty} (4^{a_n} - 4^{a_{n+2}}) = \mathbf{4}$
493.9.	$\sum_{n=1}^{\infty} (9^{a_n} - 9^{a_{n+1}}) = \mathbf{2}$
493.10.	$\sum_{n=1}^{\infty} (9^{a_n} - 9^{a_{n+2}}) = \mathbf{10}$
493.11.	$\sum_{n=1}^{\infty} (16^{a_n} - 16^{a_{n+1}}) = \mathbf{3}$
493.12.	$\sum_{n=1}^{\infty} (16^{a_n} - 16^{a_{n+2}}) = \mathbf{18}$
493.13.	$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{1+48a_n} - \sqrt{1+48a_{n+1}}) = \mathbf{4}$
493.14.	$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{1+48a_n} - \sqrt{1+48a_{n+2}}) = \mathbf{10}$

494. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^5 \frac{dx}{x^2 - 4x + 5},$$

a następnie doprowadzić wynik do postaci $w\pi$, gdzie w jest liczbą wymierną.

Rozwiązanie:

Wykonując podstawienie $t = x - 2$ i formalnie $dx = dt$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_0^5 \frac{dx}{x^2 - 4x + 5} &= \int_0^5 \frac{dx}{(x-2)^2 + 1} = \int_{-2}^3 \frac{dt}{t^2 + 1} = \operatorname{arctg} t \Big|_{t=-2}^3 = \operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg}(-2) = \\ &= \operatorname{arctg} 3 + \operatorname{arctg} 2 = \arg(1 + 3i) + \arg(1 + 2i) = \arg((1 + 3i)(1 + 2i)) = \arg(-5 + 5i) = \frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

Należy zauważyć, że ze względu na niejednoznaczność argumentu mogliśmy popełnić błąd będący wielokrotnością 2π . Jednak ze względu na oszacowania

$$\frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg} 2 < \frac{\pi}{2}$$

oraz

$$\frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg} 3 < \frac{\pi}{2}$$

otrzymujemy

$$\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 < \pi,$$

co pokazuje, że otrzymany wynik jest poprawny (dodanie lub odjęcie 2π wyprowadziłoby go poza otrzymane powyżej oszacowania).

Odpowiedź: Podana całka ma wartość $3\pi/4$.

495. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^7 \frac{4x}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} dx.$$

podając wynik w postaci liczby całkowitej.

Rozwiązanie:

Wykonujemy podstawienie

$$t = \sqrt[3]{x+1}, \quad x = t^3 - 1$$

i formalnie

$$dx = 3t^2 dt.$$

Ponadto $x=0$ odpowiada $t=1$, a $x=7$ odpowiada $t=2$, przy czym zależność t od x jest monotoniczna. Stąd wynika, że przedział całkowania $x \in [0, 7]$ odpowiada przedziałowi $t \in [1, 2]$.

Otrzymujemy

$$\int_0^7 \frac{4x}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} dx = \int_1^2 \frac{4 \cdot (t^3 - 1)}{t^2} 3t^2 dt = 12 \cdot \int_1^2 t^3 - 1 dt = 12 \cdot \left(\frac{t^4}{4} - t \right) \Big|_{t=1}^2 =$$

$$= 12 \cdot \left(\frac{16-1}{4} - (2-1) \right) = 12 \cdot \left(\frac{15}{4} - \frac{4}{4} \right) = 12 \cdot \frac{11}{4} = 33.$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość 33.

496. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_1^6 \frac{dx}{x^3 + 3x^2 + 2x}.$$

Zapisać wynik w postaci $\ln w$, gdzie w jest liczbą wymierną.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3 + 3x^2 + 2x} &= \frac{1}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}, \\ 1 &= A \cdot (x+1) \cdot (x+2) + B \cdot x \cdot (x+2) + C \cdot x \cdot (x+1). \end{aligned} \quad (\heartsuit)$$

W tym miejscu można wymnożyć iloczyny po prawej stronie równości $(\heartsuit)$, a następnie porównując współczynniki występujące po obu jej stronach uzyskać układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi A, B, C .

My jednak wybierzemy inną drogę, a mianowicie podstawimy w równości $(\heartsuit)$ kolejno $x=0$, $x=-1$, $x=-2$ otrzymując odpowiednio

$$\begin{aligned} 1 &= 2A, & \text{skąd} & \quad A = \frac{1}{2}, \\ 1 &= -B, & \text{skąd} & \quad B = -1, \\ 1 &= 2C, & \text{skąd} & \quad C = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} \int_1^6 \frac{dx}{x^3 + 3x^2 + 2x} &= \int_1^6 \frac{1/2}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1/2}{x+2} dx = \frac{\ln|x|}{2} - \ln|x+1| + \frac{\ln|x+2|}{2} \Bigg|_{x=1}^6 = \\ &= \frac{\ln 6}{2} - \ln 7 + \frac{\ln 8}{2} - \frac{\ln 1}{2} + \ln 2 - \frac{\ln 3}{2} = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{2} - \ln 7 + \frac{3 \cdot \ln 2}{2} - 0 + \ln 2 - \frac{\ln 3}{2} = \\ &= 3 \cdot \ln 2 - \ln 7 = \ln 8 - \ln 7 = \ln \frac{8}{7}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podana całka ma wartość $\ln \frac{8}{7}$.

497. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^{2\pi} x \cos x \, dx .$$

Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

Rozwiązanie:

Sposób I: (rzemieślniczy)

Wykonujemy całkowanie przez części:

$$\int_0^{2\pi} x \cos x \, dx = x \cdot \sin x \Big|_{x=0}^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin x \, dx = 0 - 0 - \int_0^{2\pi} \sin x \, dx = 0 ,$$

gdyż całka z sinusa po pełnym okresie jest równa 0.

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość 0.

Sposób II: (pomysłowy)

Wykonując podstawienie $x = t + \pi$, czyli $t = x - \pi$, otrzymujemy:

$$\int_0^{2\pi} x \cos x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} (t + \pi) \cos(t + \pi) \, dt = - \int_{-\pi}^{\pi} (t + \pi) \cos t \, dt = - \int_{-\pi}^{\pi} t \cos t \, dt - \pi \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \, dt .$$

Dla zakończenia rozwiązania wystarczy zauważyć, że całka $\int_{-\pi}^{\pi} t \cos t \, dt$ jest równa 0 jako

całka z funkcji nieparzystej po przedziale symetrycznym względem zera, a całka $\int_{-\pi}^{\pi} \cos t \, dt$ jest równa 0 jako całka z cosinusa po pełnym okresie.

498. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x} .$$

lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

Rozwiązanie:

Rozkładając funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x} &= \int_1^{\infty} \frac{dx}{x \cdot (x + 1)} = \int_1^{\infty} \frac{1}{x} - \frac{1}{x + 1} \, dx = \ln|x| - \ln|x + 1| \Big|_{x=1}^{\infty} = \ln \left| \frac{x}{x + 1} \right| \Big|_{x=1}^{\infty} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left| \frac{x}{x + 1} \right| - \ln \frac{1}{2} = \ln \left| \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x + 1} \right| + \ln 2 = \ln|1| + \ln 2 = \ln 2 . \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa jest zbieżna i ma wartość $\ln 2$.

499. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 50}.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy daną całkę i wykonujemy kolejno podstawienia $y = x + 1$ oraz $t = y/7$:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 50} &= \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 49} = \int \frac{dy}{y^2 + 49} = \int \frac{dy}{49(y/7)^2 + 49} = \int \frac{7 dt}{49t^2 + 49} = \\ &= \frac{1}{7} \cdot \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{\operatorname{arctg} t}{7} + C = \frac{\operatorname{arctg}(y/7)}{7} + C = \frac{\operatorname{arctg}((x+1)/7)}{7} + C. \end{aligned}$$

500. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{2x+1}{x^4+x^2} dx.$$

Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{x^4+x^2} &= \frac{1}{(x^2+1) \cdot x^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x} + \frac{D}{x^2}, \\ 2x+1 &= (Ax+B) \cdot x^2 + C \cdot x \cdot (x^2+1) + D \cdot (x^2+1), \\ 2x+1 &= Ax^3 + Bx^2 + Cx^3 + Cx + Dx^2 + D, \\ \begin{cases} 0 &= A+C \\ 0 &= B+D \\ 2 &= C \\ 1 &= D \end{cases} \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy $A = -2$ i $B = -1$.

Wobec tego

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{2x+1}{x^4+x^2} dx &= \int_{\sqrt{3}}^{\infty} -\frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} dx = -\ln(x^2+1) - \operatorname{arctg} x + 2\ln|x| - \frac{1}{x} \Big|_{x=\sqrt{3}}^{\infty} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} (-\operatorname{arctg} x) + \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x}\right) + \lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) + \ln 4 + \operatorname{arctg} \sqrt{3} - 2\ln \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \\ &= -\frac{\pi}{2} + 0 + \ln 1 + \frac{\pi}{3} + \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6} + \ln\left(\frac{4}{3}\right). \end{aligned}$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka jest zbieżna i ma wartość $\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6} + \ln\left(\frac{4}{3}\right)$.