

Dla podanych a, b, f obliczyć **jako granicę ciągu sum całkowych Riemanna** pole figury

$$\{(x, y) : a \leq x \leq b \wedge 0 \leq y \leq f(x)\},$$

czyli całkę oznaczoną

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Wykorzystać podany ciąg podziałów $\left((x_{n,k})_{k=0}^n\right)_{n=1}^\infty$ przedziału $[a, b]$.

Następnie sprawdzić otrzymany wynik przez bezpośrednie całkowanie.

Potrzebny wzorek:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left((x_{n,k} - x_{n,k-1}) \cdot f(x_{n,k}) \right).$$

195. $a = 1, \quad b = 2, \quad f(x) = x^{10}, \quad x_{n,k} = 2^{k/n}.$

196. $a = 1, \quad b = e, \quad f(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad x_{n,k} = e^{k/n}.$

197. $a = e, \quad b = e^2, \quad f(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad x_{n,k} = e \cdot e^{k/n}.$

198. $a = 0, \quad b = 1, \quad f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x_{n,k} = \frac{k^3}{n^3}.$

199. $a = 1, \quad b = 2, \quad f(x) = \frac{1}{x}, \quad x_{n,k} = 2^{k/n}.$

200. $a = 0, \quad b = 4, \quad f(x) = \sqrt{x}, \quad x_{n,k} = \frac{4k^2}{n^2}.$

201. $a = 1, \quad b = 8, \quad f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x_{n,k} = \frac{(n+k)^3}{n^3}.$

202. $a = 1, \quad b = 8, \quad f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x_{n,k} = 8^{k/n}.$

Obliczyć granice

$$203. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} + \dots + \frac{1}{3n}$$

$$204. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^{20} + 2^{20} + 3^{20} + \dots + n^{20}}{n^{21}}$$

$$205. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4n+1} + \sqrt{4n+2} + \dots + \sqrt{5n} \right) \cdot \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

$$206. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{8n}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$$

$$207. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+3}} + \frac{1}{\sqrt{n+6}} + \frac{1}{\sqrt{n+9}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{7n}} \right) \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$208. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{5n+3} + \frac{4}{5n+6} + \frac{4}{5n+9} + \dots + \frac{4}{26n}$$

$$209. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{7n+2} + \frac{1}{7n+4} + \frac{1}{7n+6} + \dots + \frac{1}{9n}$$

$$210. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n^2} + \frac{n}{2(n+1)^2} + \frac{n}{2(n+2)^2} + \frac{n}{2(n+3)^2} + \dots + \frac{n}{50n^2}$$

$$211. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n^2} + \frac{n}{n^2 + (n+1)^2} + \frac{n}{n^2 + (n+2)^2} + \frac{n}{n^2 + (n+3)^2} + \dots + \frac{n}{50n^2}$$

212. Wyznaczyć położenie środka ciężkości półkola.

W tym i następnym zadaniu nie musisz obliczać całek, których wartość można uzyskać geometrycznie.

213. Wyznaczyć położenie środka ciężkości półokręgu.