

7. Podaj wartość całki oznaczonej. Wynik zapisz w postaci $\ln w$, gdzie w jest liczbą wymierną zapisaną w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

a) $\int_1^7 \frac{x}{x^2+1} dx = \ln 5$

b) $\int_2^7 \frac{x}{x^2-1} dx = \ln 4$

c) $\int_4^5 \frac{3x^2-1}{x^3-x} dx = \ln 2$

d) $\int_2^3 \frac{3x^2+1}{x^3+x} dx = \ln 3$

8. Podaj wartość całki oznaczonej. Wynik zapisz w postaci w albo $w \cdot \sqrt{p}$, gdzie w jest liczbą wymierną zapisaną w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego, a p jest liczbą pierwszą.

a) $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx = 2/3$

b) $\int_0^{\pi/3} \sin^3 x dx = 5/24$

c) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin^3 x dx = 3/8 \cdot \sqrt{3}$

d) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^3 x dx = 5/12 \cdot \sqrt{2}$

9. Podaj w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p , dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (p-2)^n \quad (1, 3)$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (p+3)^n \quad (-4, -2)$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (2p-5)^n \quad (2, 3)$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (4p-5)^n \quad (1, 3/2)$

10. Podaj sumę szeregu.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \right) = 2 - e$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \right) = 9/4 - e$

c) $\sum_{n=3}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \right) = 64/27 - e$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{n+2} \right) = 17/4 - 2e$

11. Podaj w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p , dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int_0^{\infty} \frac{x^p}{x^2+x^3} dx \quad (1, 2)$ b) $\int_0^{\infty} \frac{x^p}{x^3+x^5} dx \quad (2, 4)$ c) $\int_0^{\infty} \frac{x^p}{x^4+x^7} dx \quad (3, 6)$ d) $\int_0^{\infty} \frac{x^p}{x^5+x^9} dx \quad (4, 8)$

12. Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 1 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

Podaj wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(5)}(0) = 1/6$ b) $f^{(10)}(0) = 1/11$ c) $f^{(20)}(0) = 1/21$ d) $f^{(2020)}(0) = 1/2021$