

Test dla ambitnych !!!

Czas trwania testu: 100 minut.

W czasie rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

W każdym z poniższych pięciu zadań za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi postawisz sobie odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Wynik testu niech pozostanie Twoją słodką tajemnicą.

31. Podaj normę supremum funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określonej podanym wzorem. Zapisz wynik w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

a) $f(x) = \frac{1}{x^6 + 6x^3 + 25}$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

b) $f(x) = \frac{1}{x^6 + 7x^3 + 25}$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

c) $f(x) = \frac{1}{x^6 + 8x^3 + 25}$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

d) $f(x) = \frac{1}{x^6 + 9x^3 + 25}$, $\|f\| = \dots\dots\dots$

32. Podaj sumę szeregu w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n} = \dots\dots\dots$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n} = \dots\dots\dots$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n} = \dots\dots\dots$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4n} = \dots\dots\dots$

33. Podaj wartości całek:

a) $\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} dx = \dots\dots\dots$

b) $\int_{-3}^3 \sqrt{18-x^2} - |x| dx = \dots\dots\dots$

c) $\int_{-3}^3 \sqrt{36-x^2} - |x| \cdot \sqrt{3} dx = \dots\dots\dots$

d) $\int_{-3}^3 \sqrt{12-x^2} - \frac{|x|}{\sqrt{3}} dx = \dots\dots\dots$

34. Dla podanej liczby b podaj w postaci przedziału zbiór wszystkich takich liczb rzeczywistych a , że potęgowy szereg zespolony

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{3n}}{\sqrt{n}}$$

jest zbieżny dla $z = a + bi$.

Uwaga: Istotną częścią zadania jest określenie przynależności do przedziału jego końców.

a) $b = 0$, $a \in \dots\dots\dots$

b) $b = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3}$, $a \in \dots\dots\dots$

c) $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $a \in \dots\dots\dots$

d) $b = \frac{1}{2}$, $a \in \dots\dots\dots$

35. Wiedząc, że

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n} = \frac{4 - 2 \cdot \cos x}{5 - 4 \cdot \cos x}$$

podaj wartości całek:

a) $\int_0^{2\pi} \frac{4 - 2 \cdot \cos x}{5 - 4 \cdot \cos x} dx = \dots\dots\dots$

b) $\int_0^{2\pi} \frac{4 - 2 \cdot \cos x}{5 - 4 \cdot \cos x} \cdot \cos x dx = \dots\dots\dots$

c) $\int_0^{2\pi} \frac{4 - 2 \cdot \cos x}{5 - 4 \cdot \cos x} \cdot \cos 2x dx = \dots\dots\dots$

d) $\int_0^{2\pi} \frac{4 - 2 \cdot \cos x}{5 - 4 \cdot \cos x} \cdot \cos 5x dx = \dots\dots\dots$