

31. Podaj normę supremum funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określonej podanym wzorem. Zapisz wynik w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

a) $f(x) = \frac{1}{x^6 + 6x^3 + 25}, \quad \|f\| = 1/16$

b) $f(x) = \frac{1}{x^6 + 7x^3 + 25}, \quad \|f\| = 4/51$

c) $f(x) = \frac{1}{x^6 + 8x^3 + 25}, \quad \|f\| = 1/9$

d) $f(x) = \frac{1}{x^6 + 9x^3 + 25}, \quad \|f\| = 4/19$

32. Podaj sumę szeregu w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n} = 1$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n} = 3/4$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n} = 11/18$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4n} = 25/48$

33. Podaj wartości całek:

a) $\int_{-3}^3 \sqrt{9 - x^2} dx = 9\pi/2$

b) $\int_{-3}^3 \sqrt{18 - x^2} - |x| dx = 9\pi/2$

c) $\int_{-3}^3 \sqrt{36 - x^2} - |x| \cdot \sqrt{3} dx = 6\pi$

d) $\int_{-3}^3 \sqrt{12 - x^2} - \frac{|x|}{\sqrt{3}} dx = 4\pi$

34. Dla podanej liczby b podaj w postaci przedziału zbiór wszystkich takich liczb rzeczywistych a , że potęgowy szereg zespolony

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{3n}}{\sqrt{n}}$$

jest zbieżny dla $z = a + bi$.

Uwaga: Istotną częścią zadania jest określenie przynależności do przedziału jego końców.

a) $b = 0, \quad a \in [-1, 1)$

b) $b = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3}, \quad a \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$

c) $b = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad a \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

d) $b = \frac{1}{2}, \quad a \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

35. Wiedząc, że

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n} = \frac{4 - 2 \cdot \cos x}{5 - 4 \cdot \cos x}$$

podaj wartości całek:

a) $\int_0^{2\pi} \frac{4 - 2 \cdot \cos x}{5 - 4 \cdot \cos x} dx = 2\pi$

b) $\int_0^{2\pi} \frac{4 - 2 \cdot \cos x}{5 - 4 \cdot \cos x} \cdot \cos x dx = \pi/2$

c) $\int_0^{2\pi} \frac{4 - 2 \cdot \cos x}{5 - 4 \cdot \cos x} \cdot \cos 2x dx = \pi/4$

d) $\int_0^{2\pi} \frac{4 - 2 \cdot \cos x}{5 - 4 \cdot \cos x} \cdot \cos 5x dx = \pi/32$