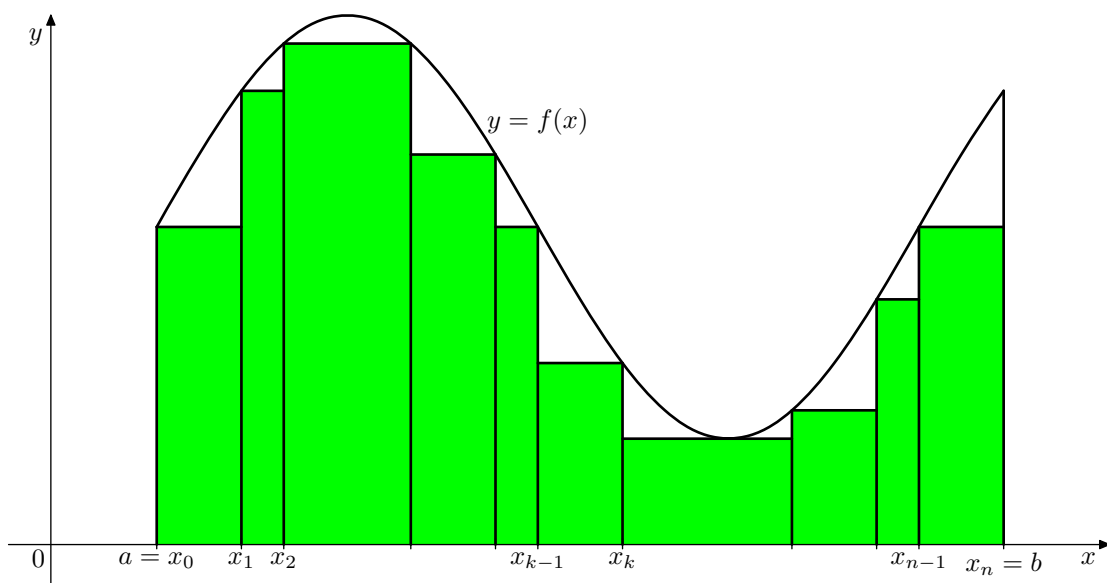


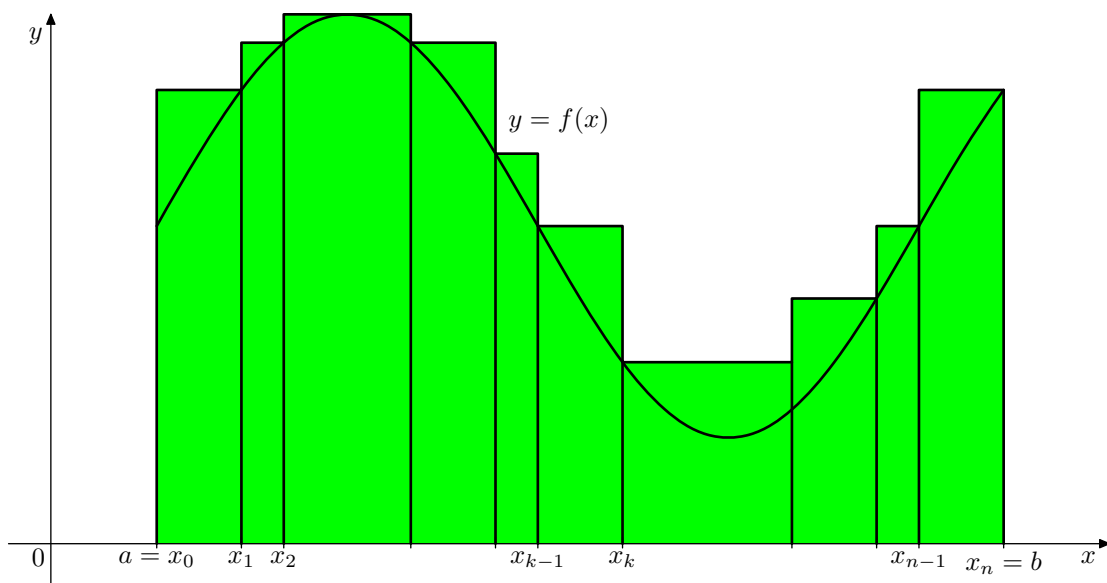
Całka Riemanna

Podziałem przedziału $[a, b]$ nazywamy każdy skończony ciąg $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$, gdzie $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$.

Z takim podziałem wiążemy figury złożone z prostokątów zbudowanych na odcinkach podziału. Z jednej strony (rys. 20) budujemy największą figurę, która jest zawarta w obszarze pod wykresem funkcji f , a z drugiej (rys. 21) najmniejszą figurę, która ten obszar zawiera.



rys. 20



rys. 21

Biorąc pod uwagę, że k -tym przedziałikiem podziału jest przedział $[x_{k-1}, x_k]$, figury zamalowane na zielono na rysunkach 20 i 21 mają pola równe odpowiednio

$$\sum_{k=1}^n \left((x_k - x_{k-1}) \cdot \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \right) \quad \text{oraz} \quad \sum_{k=1}^n \left((x_k - x_{k-1}) \cdot \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \right).$$

Jeżeli $\mathcal{P}$ jest zbiorem wszystkich podziałów $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$ przedziału $[a, b]$, to funkcja ograniczona $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest (z definicji) całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{aligned} \sup_{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{P}} \sum_{k=1}^n \left((x_k - x_{k-1}) \cdot \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \right) &= \\ &= \inf_{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{P}} \sum_{k=1}^n \left((x_k - x_{k-1}) \cdot \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \right). \end{aligned}$$

Całkowalne są wszystkie funkcje ciągłe, ale niektóre nieciągłe też (na razie tego nie precyzujemy).

Jeśli funkcja f jest całkowalna, to całka oznaczona $\int_a^b f(x) dx$ jest granicą ciągu sum Riemanna odpowiadających ciągowi podziałów przedziału $[a, b]$ o średnicy⁹⁹ dążącej do zera. W sumie Riemanna z każdego przedziałika podziału dowolnie wybieramy punkt, z którego czerpiemy wartość funkcji f . Jeżeli $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$ jest podziałem przedziału $[a, b]$, a $y_k \in [x_{k-1}, x_k]$, to odpowiadająca temu podziałowi i temu wyborowi punktów y_k suma Riemanna jest równa

$$\sum_{k=1}^n \left((x_k - x_{k-1}) \cdot f(y_k) \right).$$

Powyższy fakt zapiszę różnymi wzorami opierającymi się o różny kompromis pomiędzy ogólnością i prostotą.

Wersja 1 (najogólniejsza):

Założenia: Funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna.

Do tego dany jest ciąg podziałów przedziału $[a, b]$. W tym ciągu n -tym wyrazem jest podział $(x_{n,0}, x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,m_n-1}, x_{n,m_n})$, który jest podziałem na m_n przedziałików. I tak $x_{n,k}$ oznacza k -ty punkt n -tego podziału. Zakładamy, że średnice podziałów dążą do 0:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k \leq m_n} (x_{n,k} - x_{n,k-1}) = 0.$$

I do tego jeszcze z każdego przedziałiku każdego podziału wybieramy dowolnie jeden punkt, a dokładniej z przedziałiku $[x_{n,k-1}, x_{n,k}]$ wybieramy punkt $y_{n,k}$.

Wówczas ciąg odpowiednich sum całkowych Riemanna jest zbieżny do całki oznaczonej:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m_n} \left((x_{n,k} - x_{n,k-1}) \cdot f(y_{n,k}) \right) = \int_a^b f(x) dx.$$

⁹⁹Średnica podziału to długość najdłuższego przedziałika tego podziału: $\max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1})$.

Wersja 2 (trochę mniej ogólna: dowolne podziały, y-ki w prawych końcach):

Założenia: Funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna.

Do tego dany jest ciąg podziałów przedziału $[a, b]$. W tym ciągu n -tym wyrazem jest podział $(x_{n,0}, x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,m_n-1}, x_{n,m_n})$, który jest podziałem na m_n przedziałików. I tak $x_{n,k}$ oznacza k -ty punkt n -tego podziału. Zakładamy, że średnice podziałów dążą do 0:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k \leq m_n} (x_{n,k} - x_{n,k-1}) = 0.$$

Jako punkt z przedziałiku $[x_{n,k-1}, x_{n,k}]$ wybieramy punkt $y_{n,k} = x_{n,k}$.

Wówczas ciąg odpowiednich sum całkowych Riemanna jest zbieżny do całki oznaczonej:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m_n} \left((x_{n,k} - x_{n,k-1}) \cdot f(x_{n,k}) \right) = \int_a^b f(x) dx.$$

Wersja 3 (jeszcze mniej ogólna: n -ty podział na n części, y-ki w prawych końcach):

Założenia: Funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna.

Do tego dany jest ciąg podziałów przedziału $[a, b]$. W tym ciągu n -tym wyrazem jest podział $(x_{n,0}, x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,n-1}, x_{n,n})$, który jest podziałem na n przedziałików. I tak $x_{n,k}$ oznacza k -ty punkt n -tego podziału. Zakładamy, że średnice podziałów dążą do 0:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k \leq n} (x_{n,k} - x_{n,k-1}) = 0.$$

Jako punkt z przedziałiku $[x_{n,k-1}, x_{n,k}]$ wybieramy punkt $y_{n,k} = x_{n,k}$.

Wówczas ciąg odpowiednich sum całkowych Riemanna jest zbieżny do całki oznaczonej:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left((x_{n,k} - x_{n,k-1}) \cdot f(x_{n,k}) \right) = \int_a^b f(x) dx.$$

**Wersja 4 (n-ty podział jest podziałem na n równych przedziałów,
y-ki są prawymi końcami):**

Założenia: Funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna.
Przyjmujemy, że n -ty podział przedziału $[a, b]$ składa się z punktów

$$x_{n,k} = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$$

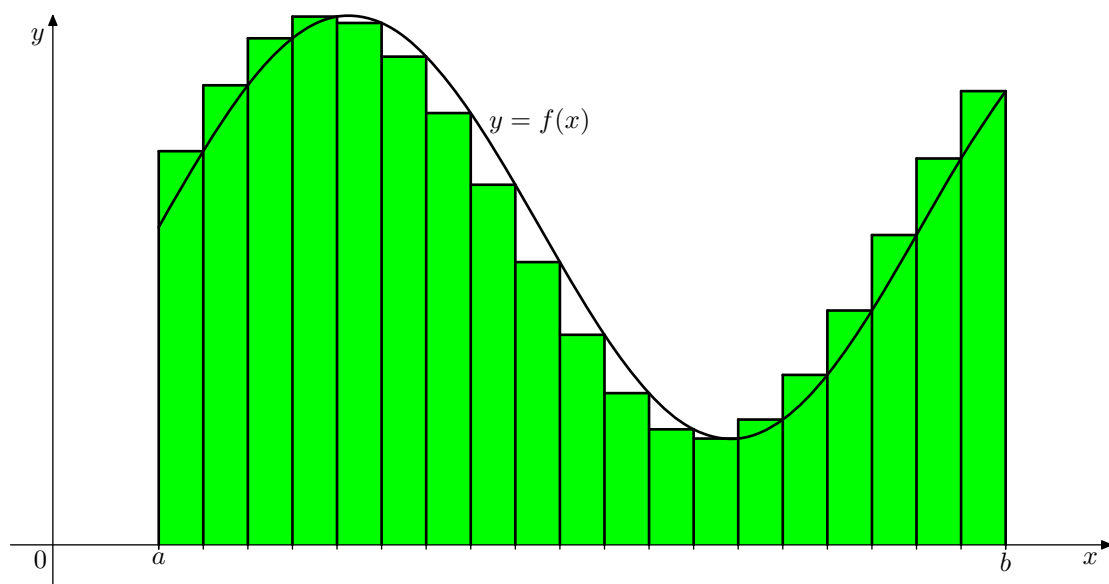
oraz że są one jednocześnie y -kami wybranymi do obliczania wartości funkcji f :

$$y_{n,k} = x_{n,k} = a + k \cdot \frac{b-a}{n}.$$

Wówczas ciąg odpowiednich sum całkowych Riemanna jest zbieżny do całki oznaczonej:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{b-a}{n} \cdot f \left(a + k \cdot \frac{b-a}{n} \right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f \left(a + k \cdot \frac{b-a}{n} \right) \right) = \int_a^b f(x) dx.$$

Suma Riemanna odpowiadająca opisanemu wyżej podziałowi przedziału na równe części przedstawiona jest na rysunku 22 jako zamalowane na zielono pole prostokątów.



rys. 22

Zauważmy, że ponieważ czynnik $\frac{b-a}{n}$ występuje we wszystkich składnikach sumy Riemanna, możemy go wyłączyć przed znak sumy.

Wersja 5 (n-ty podział jest podziałem na n równych przedziałów, y-ki są lewymi końcami):

Założenia: Funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowna.

Przyjmujemy, że n -ty podział przedziału $[a, b]$ składa się z punktów

$$x_{n,k} = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$$

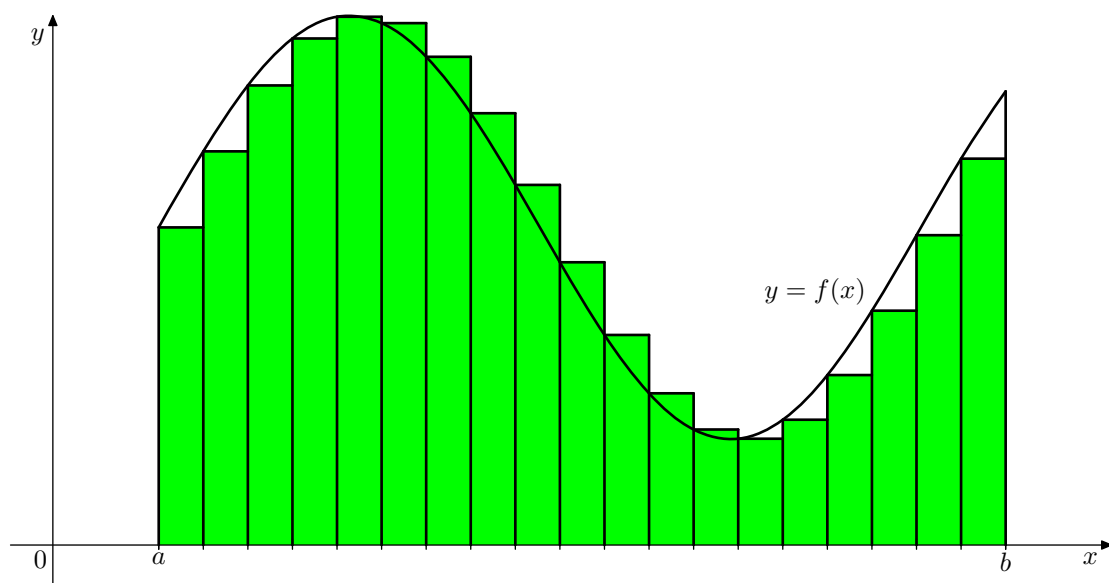
oraz że są one jednocześnie y -kami wybranymi do obliczania wartości funkcji f :

$$y_{n,k} = x_{n,k-1} = a + (k-1) \cdot \frac{b-a}{n}.$$

Wówczas ciąg odpowiednich sum całkowych Riemanna jest zbieżny do całki oznaczonej:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{b-a}{n} \cdot f \left(a + (k-1) \cdot \frac{b-a}{n} \right) \right) &= \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f \left(a + (k-1) \cdot \frac{b-a}{n} \right) \right) &= \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Suma Riemanna odpowiadająca opisanemu wyżej podziałowi przedziału na równe części przedstawiona jest na rysunku 23 jako zamalowane na zielono pole prostokątów.



rys. 23

Używanie sum Riemanna do wyliczania całki oznaczonej jest dość żmudne, a czasem wręcz może być praktycznie niemożliwe. I na dłuższą metę wydaje się bezcelowe, skoro mamy dużo prostszy sposób na obliczanie całek oznaczonych. Ale można w drugą stronę... Nie uprzedzajmy jednak tego, co za chwilę się stanie i popatrzymy na taki przykład:

Przykład 54:

Obliczyć granicę (ciągu):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \right).$$

Rozwiązanie:

Podejście 1 (naiwnie optymistyczne i dlatego nieudane):

Szacujemy sumę pod znakiem granicy od dołu i od góry, aby skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach. Oszacowanie odbywa się przez pomnożenie liczby składników (czyli n) przez wspólne oszacowanie składników, czyli składnik najmniejszy bądź największy. Otrzymujemy

$$\frac{1}{2} \leftarrow \frac{1}{2} = \frac{n}{2n} \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \leq \frac{n}{n+1} \rightarrow 1.$$

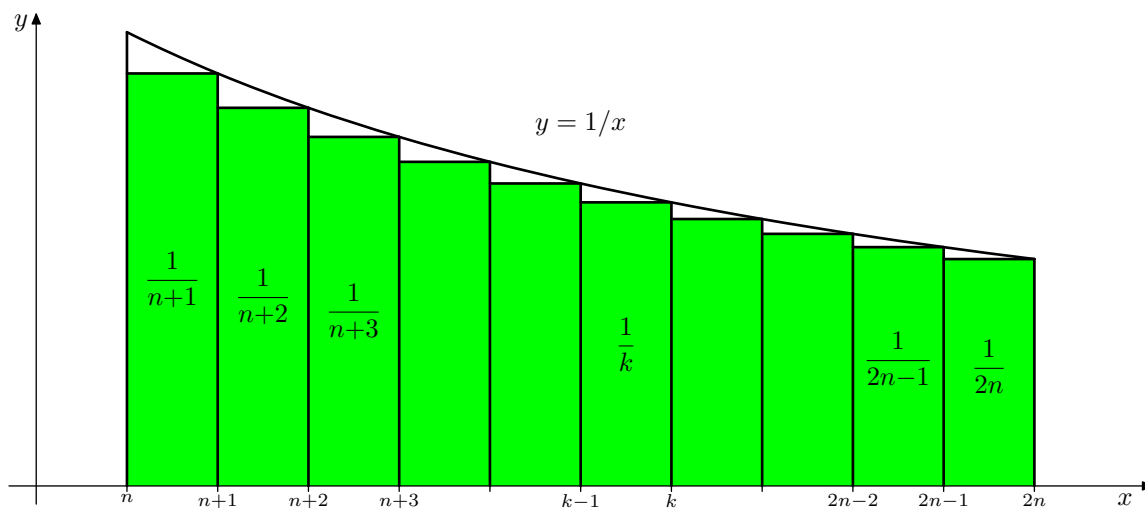
Ponieważ oszacowania dolne i górne dążą do różnych granic, twierdzenie o trzech ciągach nie ma tu zastosowania. Póki co nie tylko nie znamy granicy ciągu, ale nawet nie mamy pewności, że ciąg jest zbieżny, bo teoretycznie można sobie wyobrazić, że jego wyrazy dziwnie oscylują gdzieś między $1/2$ i 1 – raczej mało prawdopodobne, ale prostego argumentu wykluczającego taką oscylację nie widać.

Czyżbyśmy nieumiejętnie przeprowadzili oszacowania? Ale jak to zrobić lepiej, skoro iloraz pierwszego składnika sumy do ostatniego dąży do 2, a wielkość składników płynnie się zmienia. Nasze oszacowanie wrzuciło wszystkie składniki do jednego wora i dlatego było niedokładne (bo w tym worze składniki różniły się o czynnik prawie 2), ale nie widać jak w elementarny sposób uzyskać oszacowania dolne i górne dążące do tej samej granicy.

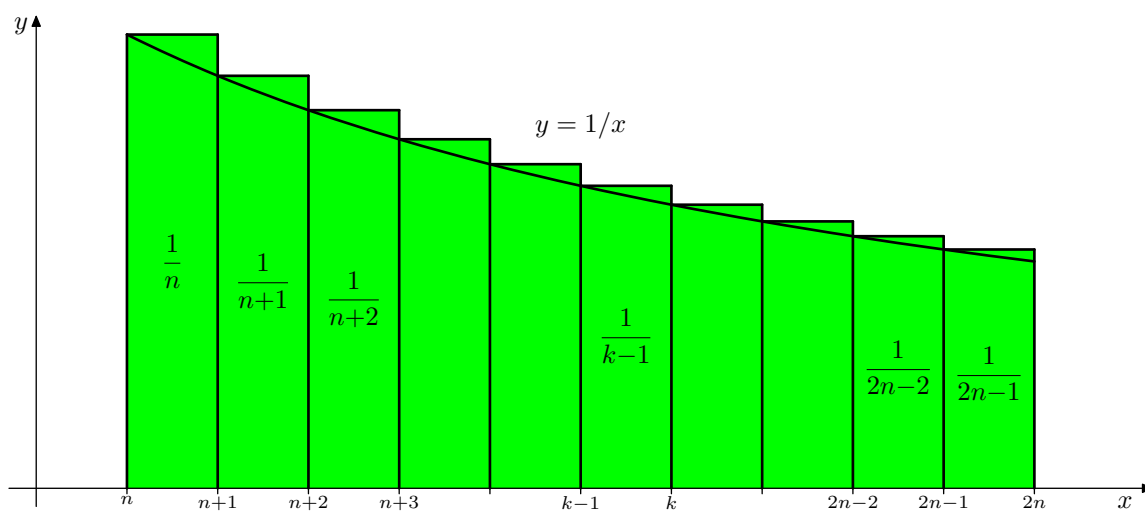
Podejście 2 (wykorzystujące specjalną postać sumy pod znakiem granicy):

Skorzystamy z twierdzenia o trzech ciągach, ale potrzebujemy naprawdę precyzyjnych oszacowań. W celu ich uzyskania rozważymy funkcję $f: [n, 2n] \rightarrow \mathbb{R}$ określoną wzorem $f(x) = 1/x$. Wówczas całka $\int_n^{2n} \frac{dx}{x}$ jest równa polu figury pod wykresem funkcji f , a ponadto porównanie tego pola z polami zielonych figur złożonych z prostokątów na rysunkach 24 i 25 prowadzi do nierówności:

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} < \int_n^{2n} \frac{dx}{x} < \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k}.$$



rys. 24



rys. 25

Ponieważ

$$\int_n^{2n} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_{x=n}^{2n} = \ln(2n) - \ln n = \ln 2,$$

otrzymujemy nierówności

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} < \ln 2 < \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Stąd

$$\ln 2 - \frac{1}{2n} < \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} < \ln 2.$$

Ponieważ otrzymane wyżej oszacowania dolne i górne dążą do tej samej granicy równej $\ln 2$, otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \ln 2.$$

Dość nieoczekiwana wartość szukanej granicy ciągu całkowiec rozgrzesza nas z niepowodzenia przy próbie skorzystania z twierdzenia o trzech ciągach po prostych elementarnych oszacowaniach – trudno bowiem oczekiwać, że proste elementarne rozważania doprowadzą do granicy równej $\ln 2$.

W powyższym rozwiązaniu nie było ciągu sum całkowych Riemanna. Natomiast wykorzystaliśmy interpretację geometryczną całki oznaczonej do uzyskania na tyle precyzyjnych oszacowań, aby można było skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach. Wprawdzie cały czas używaliśmy tej samej funkcji, ale dla każdego n był inny przedział całkowania – jednak wartość całki oznaczonej była za każdym razem taka sama. Jest to wynikiem prostoty przykładu i pewnego zbiegu okoliczności. Jednak w innych tego typu przykładach takie podejście może być niewygodne bądź wręcz nieskuteczne. Mniej naturalne w tym konkretnym przykładzie, ale bardziej ogólne jeeeeest ...

Podejście 3 (najogólniejsze, wykorzystujące zbieżność ciągu sum Riemanna do całki oznaczonej):

Przypomnimy wcześniejszy fragment wykładu:

Wersja 4 (n-ty podział jest podziałem na n równych przedziałów, y-ki są prawymi końcami):

Założenia: Funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna.

Przyjmujemy, że n -ty podział przedziału $[a, b]$ składa się z punktów

$$x_{n,k} = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$$

oraz że są one jednocześnie y -kami wybranymi do obliczania wartości funkcji f :

$$y_{n,k} = x_{n,k} = a + k \cdot \frac{b-a}{n}.$$

Wówczas ciąg odpowiednich sum całkowych Riemanna jest zbieżny do całki oznaczonej:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f \left(a + \frac{k}{n} \cdot (b-a) \right) \right) = \int_a^b f(x) dx. \quad (\heartsuit)$$

Aby wykorzystać rachunek całkowy do obliczenia granicy ciągu, którego wyrazami są coraz dłuższe sumy, trzeba tę granicę wpasować do postaci lewej strony wzoru $(\heartsuit)$. Zwróćmy uwagę, że po lewej stronie są sumy, których składniki nie zawierają ani gołego n , ani gołego k , a jedynie iloraz k/n . Ponadto sumowane są wartości jakiejś funkcji z argumentami skaczącymi o taką wartość¹⁰⁰ jak czynnik występujący przez znakiem sumy.

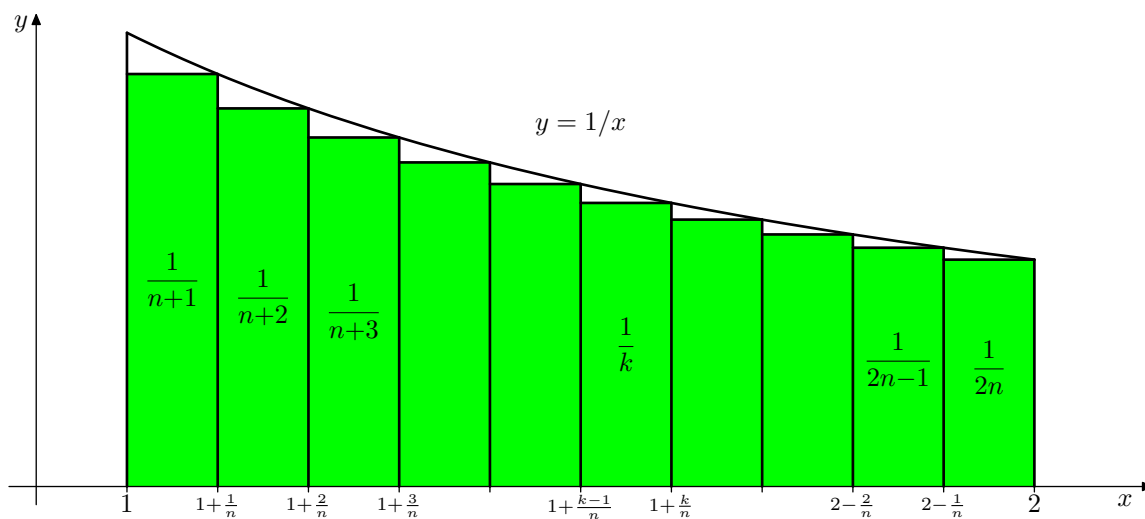
Zobaczmy jak to działa w rozważanym przez nas przykładzie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \quad \text{zmieniliśmy numerację składników}$$

¹⁰⁰W ogólnym wzorze jest to $(b-a)/n$, ale często bywa po prostu $1/n$.

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k/n} \right) = && \text{wyciągnęliśmy przed sumę czynnik } 1/n \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \right) = && \text{zapisaliśmy składniki jako wartości funkcji } f(x) = 1/x \\
&= \int_1^2 \frac{dx}{x} = && \text{skorzystaliśmy ze wzoru } (\heartsuit) \\
&= \ln x \Big|_{x=1}^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2. && \text{obliczyliśmy wartość całki}
\end{aligned}$$

Na rysunku 26 na zielono zaznaczona jest figura o polu równym n -temu wyrazowi rozważanego ciągu.



rys. 26

Zanim przejdziemy do dalszych przykładów, odnotujmy możliwe warianty wzoru ze strony 64:

Wersja 4 (n-ty podział jest podziałem na n równych przedziałów, y-ki są prawymi końcami):

Ciąg odpowiednich sum całkowych Riemanna jest zbieżny do całki oznaczonej:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f \left(a + k \cdot \frac{b-a}{n} \right) \right) = \int_a^b f(x) dx. \quad (\spadesuit)$$

Pierwsza modyfikacja wynika z konieczności. Otóż dana w zadaniu suma może nie mieć n składników, a np. $2n$, $5n$ czy $10n$. Na tę okoliczność trzeba mieć wariant wzoru ($\spadesuit$), który odpowiada podziałowi przedziału całkowania na inną niż n liczbę przedziałików równej długości. Niech tych przedziałików będzie Mn . Wówczas wzór ($\spadesuit$) przybiera postać

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b-a}{Mn} \cdot \sum_{k=1}^{Mn} f \left(a + k \cdot \frac{b-a}{Mn} \right) \right) = \int_a^b f(x) dx. \quad (\spadesuit\spadesuit)$$

Druga modyfikacja wynika z wygody. Suma może mieć Mn składników, ale może być wygodniej numerować je inaczej niż liczbami od 1 do Mn . Powiedzmy, że składniki wygodnie jest ponumerować liczbami od $Pn+1$ do $(P+M)n$. Wtedy wzór ($\spadesuit$) przybiera postać

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{c}{n} \cdot \sum_{k=Pn+1}^{(P+M)n} f \left(a + k \cdot \frac{c}{n} \right) \right) = \int_{a+cP}^{a+c(P+M)} f(x) dx. \quad (\spadesuit\spadesuit\spadesuit)$$

Zauważ, że we wzorze ($\spadesuit\spadesuit\spadesuit$) czynnik przed znakiem sumy jest równy przyrostowi argumentu funkcji f w kolejnych składnikach, a przedział całkowania odpowiada zakresowi, jaki przebiegają argumenty funkcji f w składnikach sumy.

Na przykład we wzorze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{n} \cdot \sum_{k=2n+1}^{7n} f \left(14 + \frac{3k}{n} \right) \right) = \int_{???}^{???} f(x) dx$$

czynnik przed sumą jest równy $3/n$ i o tyle przyrastają argumenty funkcji f w kolejnych składnikach sumy. Skoro w sumie wskaźnik k przebiega od z grubsza $2n$ do $7n$, to tym samym argumenty funkcji f przebiegają od 20 do 35 i takie właśnie powinny być granice całkowania.

Przykład 55:

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{k^2 - 2kn + 2n^2}.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy sumę występującą pod znakiem granicy:

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{k^2 - 2kn + 2n^2} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^2 - 2 \cdot \frac{k}{n} + 2} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=n+1}^{2n} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

$$\text{gdzie } f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}.$$

Ponieważ funkcja f jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągowi podziałów przedziału całkowania na przedziały równej długości dążą do całki oznaczonej:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=n+1}^{2n} f\left(\frac{k}{n}\right) &= \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \frac{1}{x^2 - 2x + 2} dx = \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^2 + 1} dx = \int_0^1 \frac{1}{t^2 + 1} dt = \\ &= \arctg t \Big|_{t=0}^1 = \arctg 1 - \arctg 0 = \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

gdzie po drodze wykonaliśmy podstawienie $t = x - 1$, z formalnym wzorem $dt = dx$ i przekształceniem przedziału całkowania $x \in [1, 2]$ na $t \in [0, 1]$. Otrzymujemy więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{k^2 - 2kn + 2n^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Przykład 56:

Obliczyć granicę (ciągu)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{(2n+1) \cdot \sqrt{n+1}} + \frac{\sqrt{n}}{(2n+2) \cdot \sqrt{n+2}} + \frac{\sqrt{n}}{(2n+3) \cdot \sqrt{n+3}} + \frac{\sqrt{n}}{(2n+4) \cdot \sqrt{n+4}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\sqrt{n}}{(2n+k) \cdot \sqrt{n+k}} + \dots + \frac{\sqrt{n}}{(4n-2) \cdot \sqrt{3n-2}} + \frac{\sqrt{n}}{(4n-1) \cdot \sqrt{3n-1}} + \frac{\sqrt{n}}{(4n) \cdot \sqrt{3n}} \right). \end{aligned}$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy sumę występującą pod znakiem granicy:

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{\sqrt{n}}{(2n+k) \cdot \sqrt{n+k}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{\left(2 + \frac{k}{n}\right) \cdot \sqrt{1 + \frac{k}{n}}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{2n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right),$$

$$\text{gdzie } f(x) = \frac{1}{(x+1) \cdot \sqrt{x}}.$$

Ponieważ funkcja f jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągowi podziałów przedziału całkowania na $2n$ przedziałów równej długości $1/n$ dążą do całki oznaczonej:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{2n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right) &= \int_1^3 f(x) dx = \int_1^3 \frac{1}{(x+1) \cdot \sqrt{x}} dx = 2 \cdot \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+1} dt = \\ &= 2 \cdot \arctg t \Big|_{t=1}^{\sqrt{3}} = 2 \cdot \arctg \sqrt{3} - 2 \cdot \arctg 1 = 2 \cdot \frac{\pi}{3} - 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6},\end{aligned}$$

gdzie po drodze wykonaliśmy podstawienie $t = \sqrt{x}$, czyli $x = t^2$, z formalnym wzorem $dx = 2t dt$ i przekształceniem przedziału całkowania $x \in [1, 3]$ na $t \in [1, \sqrt{3}]$.

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica ciągu jest równa $\pi/6$.

Przykład 57:

Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p \cdot \left(1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + 8 + 5\sqrt{5} + \dots + k\sqrt{k} + \dots + (5n-1)\sqrt{5n-1} + 5n\sqrt{5n}\right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej parametru p , aby granica ta była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Przekształcamy sumę występującą pod znakiem granicy:

$$n^p \cdot \sum_{k=1}^{5n} k^{3/2} = n^{p+1} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{5n} k^{3/2} = n^{p+5/2} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{5n} \left(\frac{k}{n}\right)^{3/2} = n^{p+5/2} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{5n} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

gdzie $f(x) = x^{3/2}$.

Ponieważ funkcja f jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągowi podziałów przedziału całkowania na $5n$ przedziałów równej długości $1/n$ dążą do całki oznaczonej:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{5n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^5 f(x) dx = \int_0^5 x^{3/2} dx = \frac{2}{5} \cdot x^{5/2} \Big|_{x=0}^5 = \frac{2}{5} \cdot 5^{5/2} = 2 \cdot 5^{3/2} = 10 \cdot \sqrt{5}.$$

Powyższa wartość będzie granicą rozważanego w zadaniu ciągu, o ile wykładnik w wyrażeniu $n^{p+5/2}$ będzie równy 0, czyli dla $p = -5/2$.

Odpowiedź: Dla $p = -5/2$ dana w zadaniu granica ciągu jest równa $10 \cdot \sqrt{5}$.

Obliczanie pól figur na płaszczyźnie.

A teraz opowiem Wam o zastosowaniu całek do obliczania wielkości (pól i długości) różnych figur płaskich.

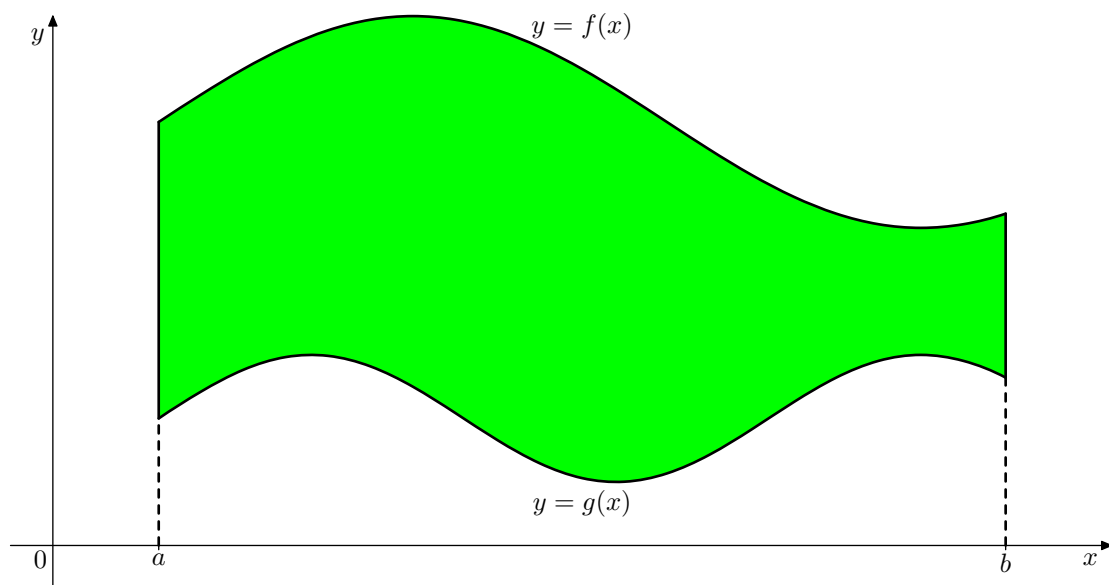
Na początek zagadnienie dość proste, więc nie poświęcę mu zbyt wiele uwagi.

Otóż przy pomocy całki oznaczonej można wyrazić pole obszaru o szczególnej postaci.

Niech dane będą funkcje ciągłe¹⁰¹ $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla każdego $x \in [a, b]$ warunek $f(x) \geq g(x)$. Interesuje nas pole obszaru

$$\{(x, y) : a \leq x \leq b \wedge g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

zamalowanego na zielono na rysunku 27.



rys. 27

Pole to wyraża się wzorem

$$\int_a^b f(x) - g(x) dx.$$

W przypadku, gdy f i g przyjmują tylko wartości nieujemne, zielony obszar to obszar pod wykresem funkcji f z usuniętym obszarem pod wykresem funkcji g , ma więc on pole

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) - g(x) dx.$$

I na tej uwadze, jeśli chodzi o wyjaśnienie powyższego wzoru, poprzestanę, koncentrując się na kolejnym, znacznie mniej oczywistym zagadnieniu.

¹⁰¹ Wystarczy, że funkcje te są całkowalne, ale nie ma sensu topić istoty sprawy w niuansach dotyczących możliwego poluzowania założeń.

Długość krzywej na płaszczyźnie.

Czym jest długość krzywej? To pytanie nie na miejscu, jeśli najpierw nie odpowiemy sobie, czym jest krzywa. I czym jest krzywa, której długość można obliczać. Naiwne i zbyt swobodne rozumienie słowa "krzywa" może w skrajnym przypadku doprowadzić do patologii w stylu krzywej Peano¹⁰², a przecież nie o to nam tu chodzi.

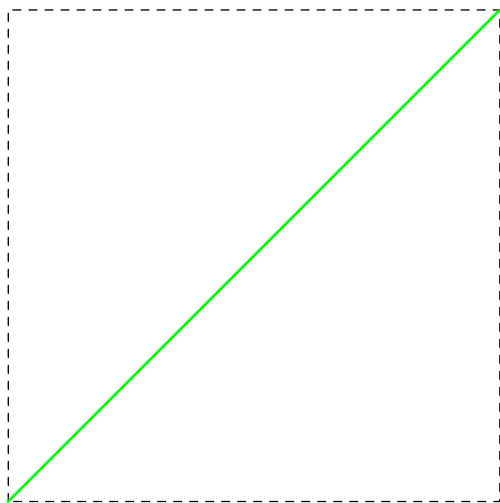
Odłożmy na razie problem wyjaśniania, czym jest krzywa, a skoncentrujmy się na zdefiniowaniu i obliczaniu długości krzywych, jeśli już to sobie kiedyś doprecyzujemy.

Jak definiowaliśmy i obliczaliśmy pola figur? Ano wykorzystywaliśmy do tego pewne szablony – proste figury, których wartość pola nie budziła żadnych wątpliwości. Tymi szablonami przybliżaliśmy coraz lepiej interesującą nas figurę, uzyskując coraz lepsze przybliżenie jej pola. Taka jest intuicja. Oczywiście musiało to mieć jakąś w miarę precyzyjną techniczną oprawę, ale istota polegała na przybliżaniu figury.

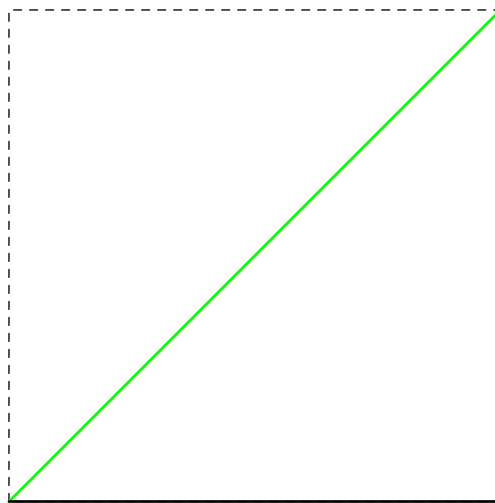
Korzystaliśmy z takiego oto, jak się okazało słusznego, założenia, że dobre przybliżenie figury daje dobre przybliżenie pola.

Do przybliżania obszarów pod wykresem funkcji wystarczyły w zupełności figury zbudowane z prostokątów. I takie proste szablony spróbujemy wykorzystać do obliczenia długości przekątnej kwadratu¹⁰³ o boku 1 (rys. 28).

Żeby nie paprać się z twierdzeniem Pitagorasa i pierwiastkami, przybliżajmy tę przekątną łamanymi złożonymi tylko z odcinków poziomych i pionowych¹⁰⁴. Coraz lepsze tego typu przybliżenia możemy zaobserwować na rysunkach 29–33.



rys. 28

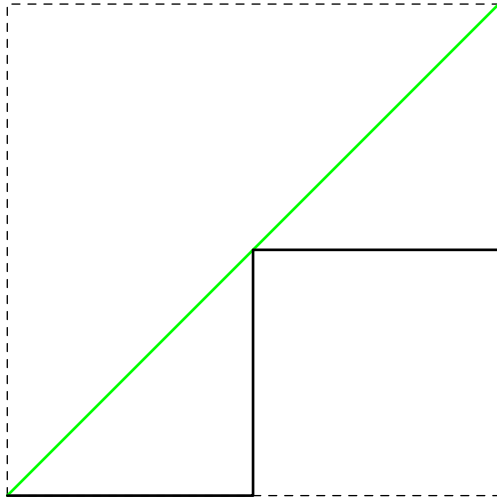


rys. 29

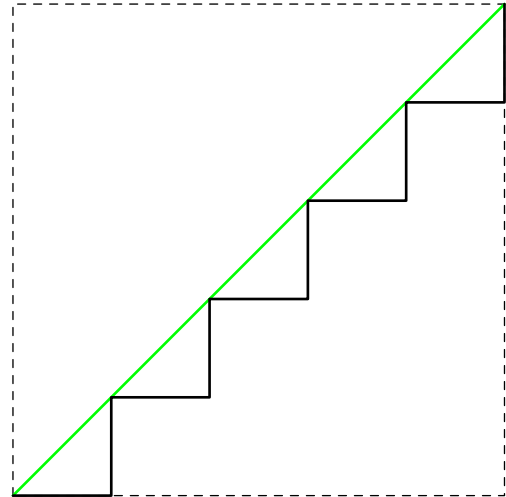
¹⁰² Jest to "krzywa", która jest pełnym kwadratem. Pogooglaj sobie, jeśli Cię to interesuje.

¹⁰³ Najprzyjemniej oblicza się wielkości, których wartość już znamy.

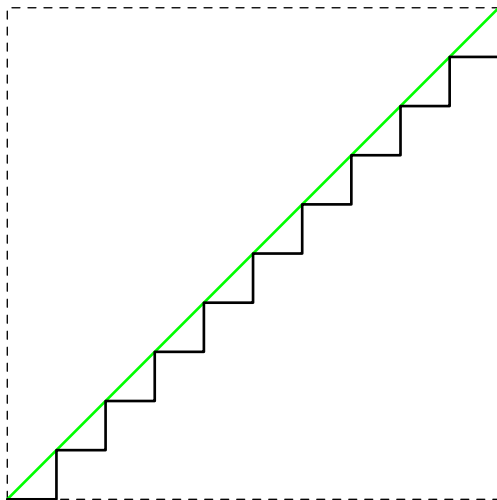
¹⁰⁴ Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że odcinki łamanej mają równą długość.



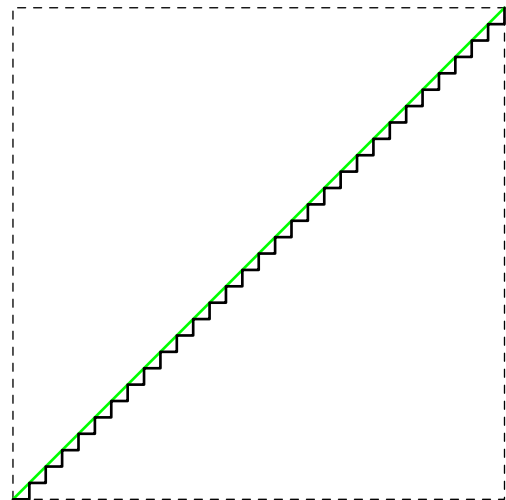
rys. 30



rys. 31



rys. 32



rys. 33

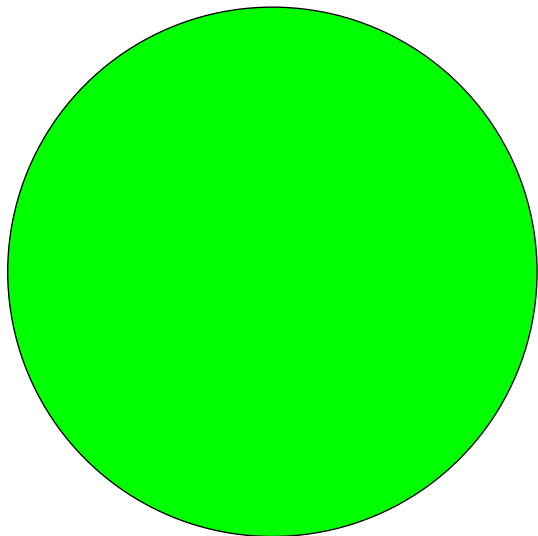
Bez trudu wyliczamy długość każdej z rozważanych łamanych – jest ona równa 2, gdyż odcinki pionowe tej łamanej mają łączną długość 1 i odcinki poziome też mają długość 1. Skoro przekątną kwadratu można dowolnie dobrze przybliżyć krzywą (w tym wypadku łamaną) o długości 2, to wychodziłoby z tego, że przekątna kwadratu o boku 1 ma długość 2. Podejrzewam, że w szkole uczono Was czegoś innego.

Morał stąd jest następujący:

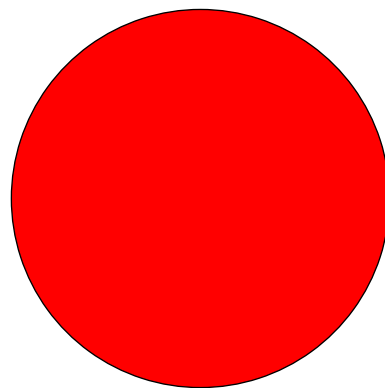
Dobre¹⁰⁵ przybliżenie krzywej inną krzywą nie musi prowadzić do dobrego przybliżenia jej długości.

¹⁰⁵W naiwnym rozumieniu.

Popatrz teraz na rysunki 34 i 35 i odpowiedz na dwa pytania:
Która figura ma większe pole: czerwona czy zielona?
Obwód której figury ma większą długość: czerwonej czy zielonej?



rys. 34



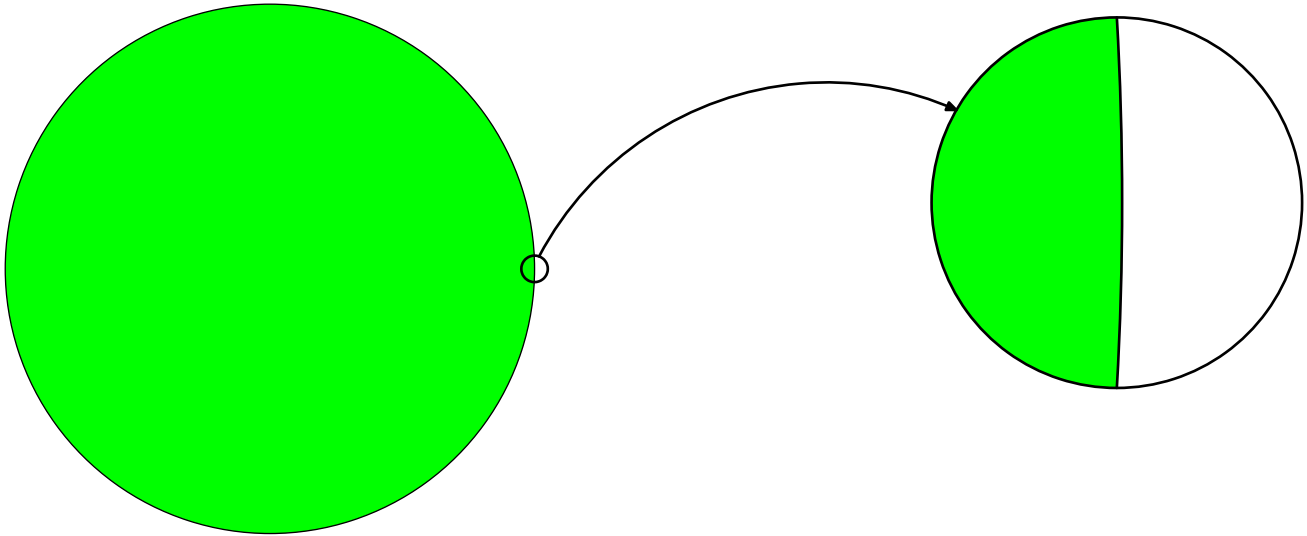
rys. 35

Jeśli twierdzisz, że większe pole ma figura zielona, trudno się z tym spierać. Nawet jeśli rysunek nie jest superdokładny, można z niego wzrokowo oszacować pola poszczególnych figur.

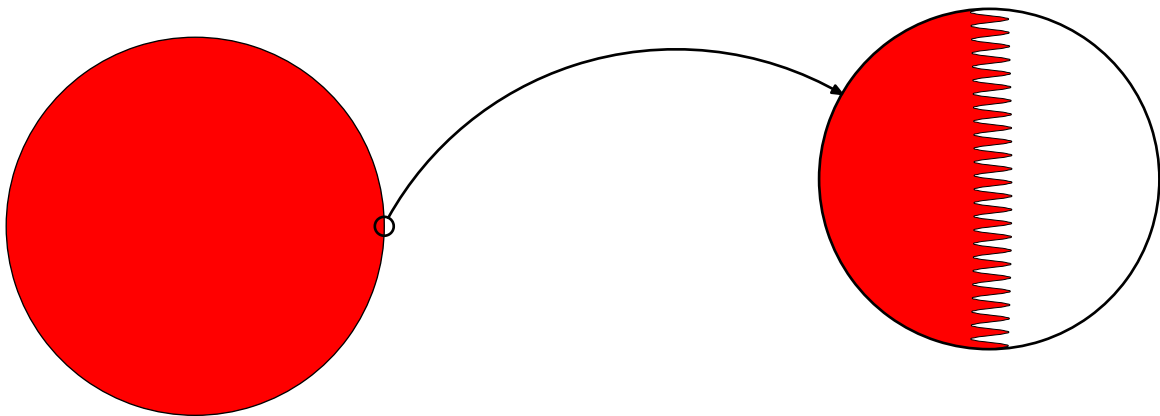
Ale dla oszacowania długości krzywej rysunek musi być nieskończenie dokładny.

Jeśli twierdzisz, że większy obwód ma figura zielona, Twoje twierdzenie jest co najmniej bezpodstawne, a w tym wypadku nawet fałszywe...

Patrząc na brzegi obu figur pod mikroskopem (rys. 36 i 37), można dostrzec, że brzeg figury zielonej jest taki, jakbyśmy oczekiwali, natomiast brzeg figury czerwonej jest mocno pozawijany, co ogromnie wpływa na długość obwodu tej figury. Ale wpływu na pole istotnego nie ma.



rys. 36



rys. 37

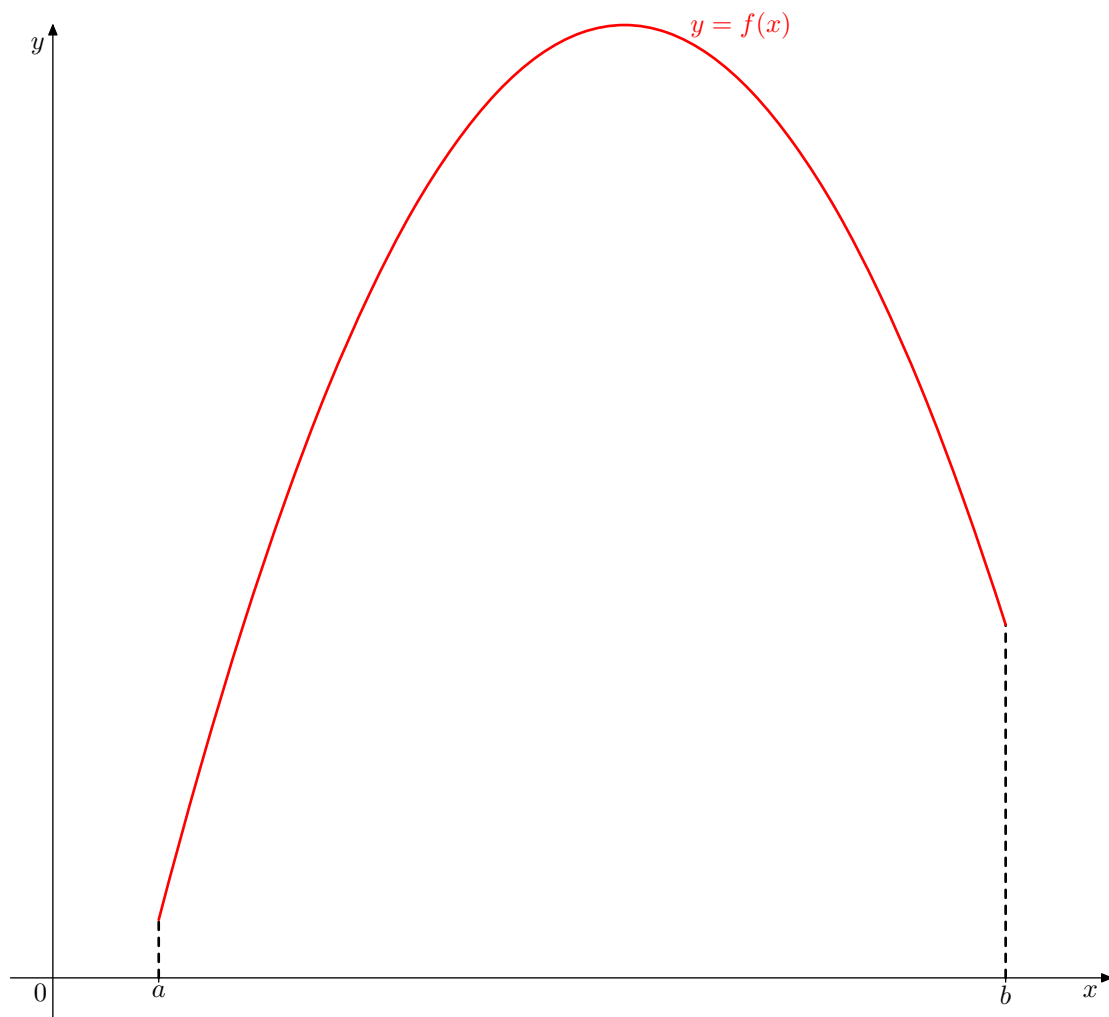
Podobne zjawisko wystąpiłoby, gdybyśmy patrzyli na mapę Polski i zastanawiali się nad powierzchnią kraju (to akurat na mapie "widać") oraz nad długością linii brzegowej – każdy, kto szedł brzegiem morza wie, że małe półwyspy i zatoczki uformowane przez morskie fale wydatnie wydłużają długość linii brzegowej, ale nie pokaże ich żadna mapa.

Te przykłady pokazują jak złudne jest naiwne przybliżanie jednej krzywej inną krzywą, gdy nie oczekujemy niczego więcej niż tylko tego, aby odpowiednie punkty obu krzywych były blisko siebie. Na długość ma ogromny wpływ pomarszczenie krzywej w mikro-skali. Eeeh... mniejsza o samą długość, to może wręcz uniemożliwić sensowne zdefiniowanie tejże długości.

Dlatego od przybliżenia jednej krzywej drugą krzywą będziemy oczekiwali nie tylko bliskości odpowiednich punktów, ale także dokładnego naśladowania kierunku. A żeby mówić o kierunku, trzeba mówić o stycznej, a styczna pachnie pochodną, a więc różniczkowalnością.

Zajmiemy się więc krzywymi, które są wykresami funkcji różniczkowalnych, najlepiej mających ciągłą pochodną.

Zagadnienie brzmi więc następująco: Dana jest funkcja¹⁰⁶ $f \in C^1[a, b]$. Obliczyć długość krzywej będącej wykresem funkcji f (rysunek 38).

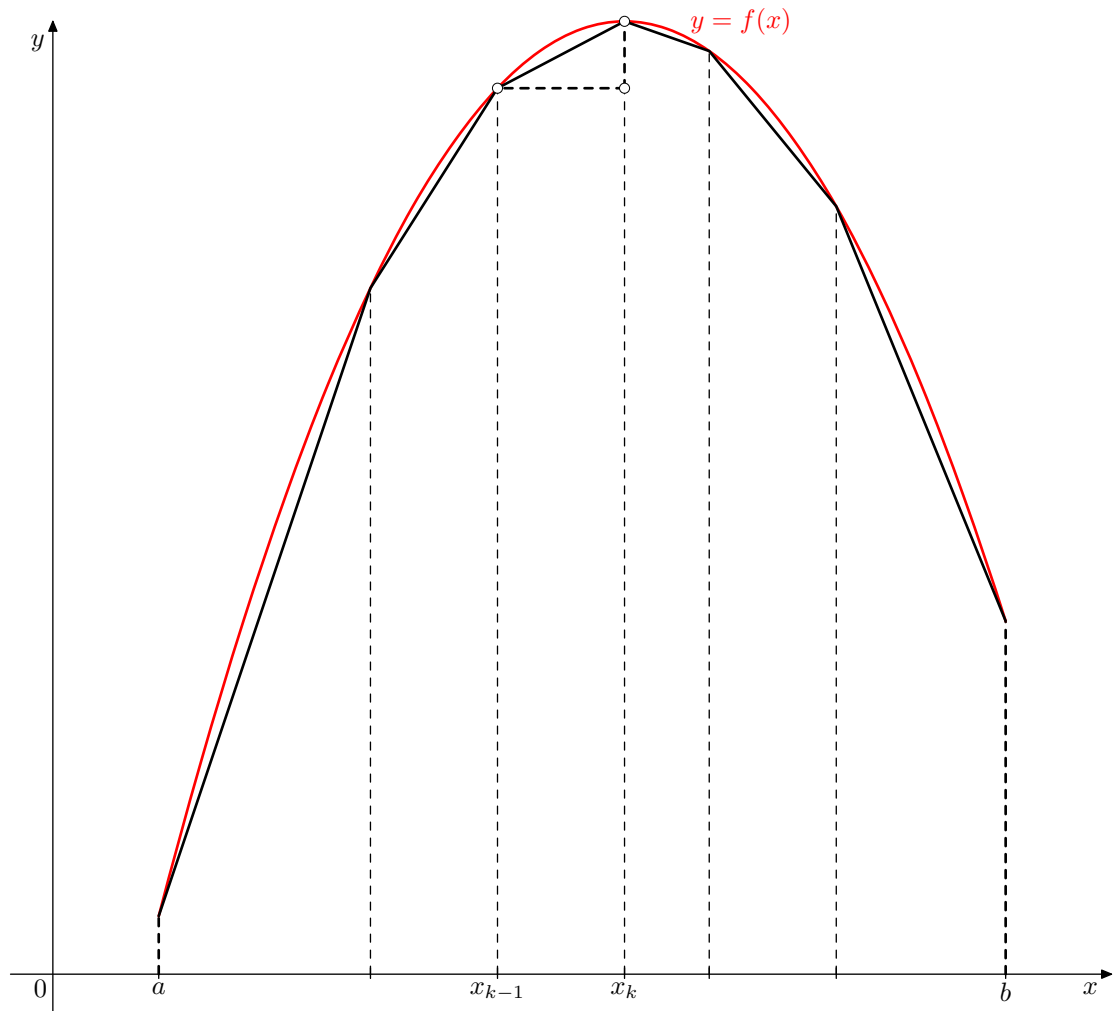


rys. 38

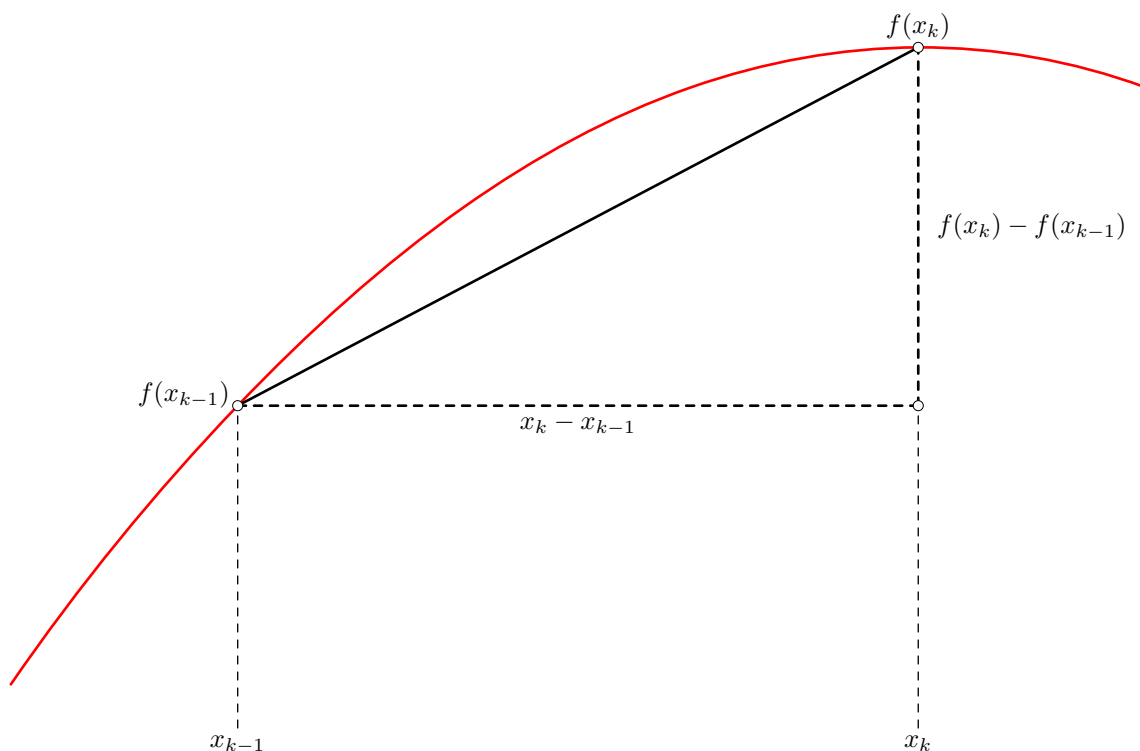
¹⁰⁶Przypominam, że funkcja klasy $C^1[a, b]$ to funkcja różniczkowalna na przedziale $[a, b]$ – z pochodnymi jednostronnymi na końcach, gdzie dodatkowo zakładamy, że pochodna funkcji f jest ciągła i ma w punktach a, b granice równe odpowiednim pochodnym jednostronnym.

Dla podziału $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ przedziału $[a, b]$ rozważmy łamaną wpisaną w wykres funkcji f , czyli łamaną o wierzchołkach $(x_k, f(x_k))$, przedstawioną na rysunku 39.

Jej długość jest sumą długości odcinków, które się na nią składają. Obliczmy długość k -tego odcinka, który w powiększeniu jest przedstawiony na rysunku 40.



rys. 39



rys. 40

Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że długość k -tego odcinka łamanej jest równa

$$\begin{aligned} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} &= (x_k - x_{k-1}) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \right)^2} = \\ &= (x_k - x_{k-1}) \cdot \sqrt{1 + (f'(y_k))^2}, \end{aligned}$$

gdzie $y_k \in (x_{k-1}, x_k)$ istnieje na mocy twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej.

To prowadzi do następującego wzoru na długość łamanej:

$$\sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \cdot \sqrt{1 + (f'(y_k))^2}.$$

Powyższe rachunki przeprowadzone są dla pojedynczego podziału przedziału $[a, b]$, który to podział oznaczyliśmy przez $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$. Zamiast tego przyjmijmy, że dany mamy ciąg podziałów o średnicy dążącej do zera, niech n -tym podziałem ciągu będzie $(x_{n,0}, x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,n})$.

Wówczas otrzymamy nie pojedynczą łamaną, ale ciąg łamanych, których długości tworzą ciąg liczbowy o n -tym wyrazie równym:

$$\sum_{k=1}^n (x_{n,k} - x_{n,k-1}) \cdot \sqrt{1 + (f'(y_{n,k}))^2},$$

gdzie $y_{n,k} \in (x_{n,k-1}, x_{n,k})$.

W tym ciągu liczbowym możemy rozpoznać sumy całkowe Riemanna dążące do całki

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx,$$

która to całka wyraża szukaną długość wykresu funkcji f .

Wzór do zapamiętania:

Długość krzywej będącej wykresem funkcji różniczkowalnej f na przedziale $[a, b]$ jest równa

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Niestety, kwadrat pochodnej pod pierwiastkiem w funkcji podcałkowej powoduje, że nawet dla stosunkowo prostych funkcji obliczenie długości ich wykresu jest trudne lub wręcz niemożliwe.

Środki ciężkości figur płaskich.

Czym jest środek ciężkości¹⁰⁷ figury, najłatwiej wyobrazić sobie na przykładzie figury płaskiej. Jeżeli figurą tą jest pewien obszar na płaszczyźnie, to wycinając ten obszar z jednorodnego¹⁰⁸ sztywnego kartonu albo blachy, możemy próbować balansować wycięty obszar na czubku zaostrego ołówka. Środkiem ciężkości jest punkt, który umieszczony na ostrzu ołówka da nam chwilowe poczucie równowagi¹⁰⁹. Jeśli ostrze ołówka będzie trochę stępione, to może nam się nawet udać uzyskanie równowagi trwałej.

Analogicznie będziemy rozumieli środek ciężkości krzywej płaskiej. Krzywą taką trzeba wygiąć z cienkiego, ale masywnego jednorodnego drutu, a następnie położyć na nieważkiej¹¹⁰ sztywnej powierzchni płaskiej (najlepiej do niej przykleić, żeby się nie ślizgała). Wówczas drut wraz z nieważką powierzchnią będą tworzyć bryłę¹¹¹ sztywną, w której za sztywność i możliwość podpierania w dowolnym punkcie odpowiada nieważka powierzchnia, a za rozmieszczenie masy odpowiada drut. Tak samo moglibyśmy próbować balansować tę bryłę na czubku ołówka – uda się to tylko wtedy, gdy podeprzemy ją w środku ciężkości krzywej.

Podobnie wygląda interpretacja środka ciężkości układu mas punktowych. Trzeba je przykleić do nieważkiej sztywnej powierzchni płaskiej i tak otrzymany twór balansować na czubku ołówka.

¹⁰⁷W naszych zastosowaniach można również mówić "środek masy". W zasadzie właśnie o środek masy nam chodzi, ale w geometrii zwykło się mówić o środku ciężkości figury. Z punktu widzenia fizyki oba pojęcia są tożsame w jednorodnym polu grawitacyjnym.

¹⁰⁸Oczywiście materiał mógłby być niejednorodny, wtedy trzeba byłoby uwzględnić zmieniającą się gęstość powierzchniową (ewentualnie liniową w przypadku krzywej). Nie wnosi to jednak żadnych nowych zjawisk, a jedynie komplikuje otrzymane wzory – aż taka ogólność nie jest nam tu potrzebna.

¹⁰⁹Podparcie obszaru w jakimkolwiek innym punkcie nie uda się nawet na moment.

¹¹⁰W praktyce: bardzo lekkiej.

¹¹¹Słowo "bryła" kojarzy się z tworem trójwymiarowym, podczas gdy tu mamy twór płaski. Jednak patrząc na ten model (powierzchnia + drut) w świecie trójwymiarowym widzimy twór trójwymiarowy, o zaniedbywalnie małej grubości.

W szkolnej matematyce "środek ciężkości" kojarzy się przede wszystkim ze środkiem ciężkości trójkąta, a ten definiowany jest jako punkt przecięcia środkowych. I tyle. Ani słowa o masach, czy jakiegokolwiek fizyce. No tak, ale przecież ta nazwa nie powstała w oderwaniu od fizycznego środka ciężkości. Tylko czymże jest środek ciężkości trójkąta?

Można pomyśleć o trzech możliwościach:

- Środek ciężkości powierzchni trójkąta, czyli trójkąta wyciętego z kartonu.
- Środek ciężkości obwodu trójkąta, czyli obwodu trójkąta wygiętego z drutu.
- Środek ciężkości wierzchołków trójkąta, czyli trzech jednakowych mas punktowych umieszczonych w wierzchołkach.

Zastanów się nad odpowiedzią na następujące pytania:

Czy w ogólnym trójkącie powyższe trzy środki ciężkości leżą w jednym punkcie, czy też mogą to być różne punkty?

Jeśli różne, to który z nich jest środkiem ciężkości znanym z geometrii trójkąta?

Podstawowa własność środka ciężkości układu mas, nieważne czy punktowych, czy o gęstości liniowej (drut), czy powierzchniowej (blacha) czy nawet objętościowej (bryła trójwymiarowa), jest następująca:

Możemy wybrać dowolną część masy wchodzącej w skład układu mas, a następnie zsunąć te masy do ich środka ciężkości. Wtedy środek ciężkości całego układu mas nie ulegnie zmianie.

Wracając do trójkąta: Środek ciężkości odcinka (w domyśle: wykonanego z jednorodnego materiału) leży w geometrycznym środku odcinka, a masa tegoż odcinka jest wprost proporcjonalna do jego długości. Tak więc środek ciężkości obwodu trójkąta (w domyśle: wygiętego z jednorodnego drutu) jest taki, jak gdyby w środkach boków trójkąta umieścić masy punktowe proporcjonalne do długości tychże boków.

Rozważmy trójkąt równoramienny o bardzo krótkiej podstawie i bardzo długich ramionach. Jego geometryczny środek ciężkości leży w $1/3$ wysokości. Jednak obwód tego trójkąta składa się z dwóch prawie pokrywających się odcinków (ramion) i podstawy zaniedbywalnej pod względem masy. Zatem środek ciężkości obwodu leży prawie w połowie wysokości trójkąta. Skoro oba środki ciężkości¹¹² leżą w różnych odległościach od podstawy trójkąta, to znaczy, że się nie pokrywają. Tak więc środek ciężkości obwodu trójkąta to na ogół nie to samo, co geometryczny środek ciężkości (czyli punkt przecięcia środkowych).

Okazuje się jednak, że środek ciężkości wierzchołków trójkąta pokrywa się ze środkiem ciężkości trójkąta wyciętego z kartonu i jest to geometryczny środek trójkąta¹¹³.

Nie będę wchodził w szczegóły, dlaczego tak jest, gdyż nie jest to główny temat wykładu.

¹¹²Geometryczny środek ciężkości trójkąta oraz środek ciężkości obwodu trójkąta.

¹¹³Analogicznie jest w przestrzeni trójwymiarowej. Geometryczny środek ciężkości czworościanu to zarówno środek ciężkości pełnej bryły czworościennej jak i środek ciężkości jednakowych mas umieszczonych w wierzchołkach czworościanu. Czym innym jest środek ciężkości powierzchni czworościanu (ściany z blachy), a jeszcze czym innym środek ciężkości krawędzi (szkielet czworościanu wykonany z drutu).

Zamiast tego zajmiemy się obliczaniem położenia środka ciężkości. Zaczniemy od przypadku mas punktowych. Niech dla $k = 1, 2, \dots, n$ punkt materialny o masie m_k będzie umieszczony w punkcie (x_k, y_k) . Wówczas środek ciężkości tak rozmieszczonych n mas punktowych znajduje się w punkcie

$$\left(\frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{\sum_{k=1}^n m_k}, \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_k}{\sum_{k=1}^n m_k} \right).$$

Zauważmy, że w mianownikach jest suma wszystkich mas, czyli łączna masa całego układu n mas. W licznikach są natomiast prawie takie same sumy, z tym że poszczególne składniki są przemnożone przez współrzędne odpowiadające położeniu poszczególnych mas.

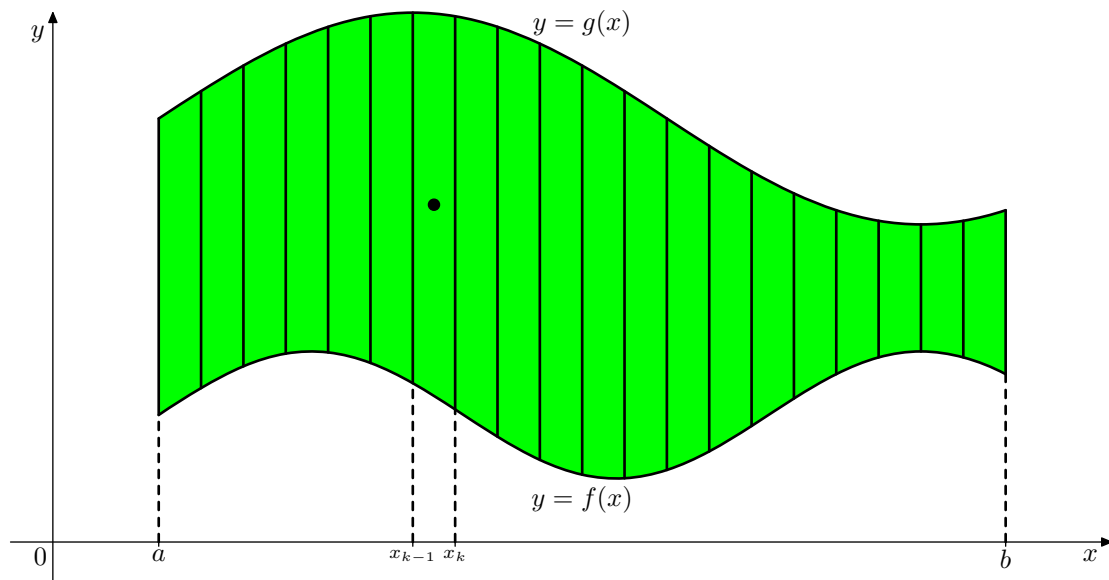
Czasami mówi się, że współrzędne środka masy są średnimi ważonymi odpowiednich współrzędnych punktów materialnych wchodzących w skład układu mas.

Środek ciężkości obszaru na płaszczyźnie.

Bez wchodzenia w nadmierne formalizmy¹¹⁴, wyprowadzę wzór na środek ciężkości obszaru

$$\{(x, y) : x \in [a, b] \wedge f(x) \leq y \leq g(x)\},$$

gdzie funkcje ciągłe $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ spełniają nierówność $f(x) \leq g(x)$ dla każdego $x \in [a, b]$.



rys. 41

¹¹⁴A dokładniej: w konwencji, którą można spotkać w fizyce.

Podzielmy przedział $[a, b]$ na małe przedziałiki (rys. 41). To prowadzi do podziału rozważanej figury na paski o szerokości¹¹⁵ $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Pole takiego paska jest iloczynem jego szerokości Δx_k przez jego długość, która jest z grubsza równa $g(x_k) - f(x_k)$.

Wobec tego pole całej figury jest w przybliżeniu równe¹¹⁶

$$\sum_k \left(g(x_k) - f(x_k) \right) \cdot \Delta x_k.$$

W rozważaniach fizycznych przejście do granicy z sumami całkowitymi Riemanna często odbywa się przy pomocy formułki w stylu: jak paski staną się nieskończenie wąskie, to otrzymamy dokładną wartość pola, a suma przekształci się w całkę¹¹⁷

$$\int_a^b g(x) - f(x) dx.$$

Na razie otrzymaliśmy znany nam już wzór na pole figury¹¹⁸.

Środek ciężkości k -tego paska¹¹⁹ leży z grubsza w połowie jego długości¹²⁰, w przybliżeniu w punkcie

$$\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}, \frac{f(x_k) + g(x_k)}{2} \right),$$

co przy bardzo wąskim pasku jest w przybliżeniu równe mniej dokładnemu, ale prostszemu punktowi¹²¹

$$(x_k, y_k) = \left(x_k, \frac{f(x_k) + g(x_k)}{2} \right).$$

Biorąc pod uwagę, że masa¹²² tegoż paska jest z grubsza równa $m_k = (g(x_k) - f(x_k)) \cdot \Delta x_k$, otrzymujemy przybliżone współrzędne środka ciężkości obszaru jako

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sum_k x_k m_k}{\sum_k m_k}, \frac{\sum_k y_k m_k}{\sum_k m_k} \right) = \\ & = \left(\frac{\sum_k x_k \cdot (g(x_k) - f(x_k)) \cdot \Delta x_k}{\sum_k (g(x_k) - f(x_k)) \cdot \Delta x_k}, \frac{\sum_k \frac{f(x_k) + g(x_k)}{2} \cdot (g(x_k) - f(x_k)) \cdot \Delta x_k}{\sum_k (g(x_k) - f(x_k)) \cdot \Delta x_k} \right), \end{aligned}$$

¹¹⁵Literka Δ w fizyce odnosi się do przyrostu następującej po niej wielkości. Oznaczenie Δx_k należy rozumieć nie jako przyrost x_k (czyli $\Delta(x_k)$), co specjalnie nie ma sensu, ale jako k -ty przyrost x 'a, czyli $(\Delta x)_k$.

¹¹⁶W tej konwencji pod znakiem sumy piszemy tylko indeks numerujący **wszystkie** paski, nie precyzując wyraźnie zakresu zmienności tego indeksu.

¹¹⁷Przy tym Δx_k (a w niektórych wersjach Δx) zamienia się w dx .

¹¹⁸Nie dbam o zmianę roli f i g w stosunku do oznaczeń we wcześniejszej części wykładu.

¹¹⁹Duża czarna kropka na rysunku 41.

¹²⁰I z grubsza w połowie szerokości.

¹²¹Drugą współrzędną dla krótkości oznaczamy przez y_k .

¹²²Czyli pole. Dla figury wyciętej z jednorodnego materiału masa jest proporcjonalna do pola.

co przy nieskończeniu wąskich paskach daje dokładne położenie środka ciężkości obszaru wyrażone przy pomocy całek:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\int_a^b x \cdot (g(x) - f(x)) \, dx}{\int_a^b g(x) - f(x) \, dx}, \frac{\int_a^b \frac{f(x)+g(x)}{2} \cdot (g(x) - f(x)) \, dx}{\int_a^b g(x) - f(x) \, dx} \right) = \\ & = \left(\frac{\int_a^b x \cdot (g(x) - f(x)) \, dx}{\int_a^b g(x) - f(x) \, dx}, \frac{\frac{1}{2} \cdot \int_a^b (g(x))^2 - (f(x))^2 \, dx}{\int_a^b g(x) - f(x) \, dx} \right). \end{aligned}$$

Środek ciężkości krzywej płaskiej.

Teraz zajmijmy się środkiem ciężkości krzywej

$$\{(x, f(x)) : x \in [a, b]\},$$

gdzie funkcja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i ma ciągłą pochodną¹²³.

Podzielmy przedział $[a, b]$ na małe przedziały i przyjrzyjmy się k -temu przedziałowi długości $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ (rys. 42).

Odpowiada mu cięciwa¹²⁴ długości $\sqrt{1 + (f'(c))^2} \cdot \Delta x_k$, gdzie c należące do przedziału istnieje na mocy twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej¹²⁵. Jeśli przedział jest bardzo mały, to zamiast c można wziąć inny jego punkt, popełnimy wtedy niewielki błąd. Także środek ciężkości cięciwy, leżący w jej połowie, może być z małą szkodą dla dokładności wyliczeń przesunięty do jednego jej końca. Możemy więc dla celu przybliżonych rachunków przyjąć, że k -ta cięciwa ma masę (czyli długość)

$$m_k = \sqrt{1 + (f'(x_k))^2} \cdot \Delta x_k,$$

która to masa jest skupiona w punkcie

$$(x_k, y_k) = (x_k, f(x_k)).$$

Wówczas środek ciężkości krzywej leży w przybliżeniu w punkcie

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sum_k x_k m_k}{\sum_k m_k}, \frac{\sum_k y_k m_k}{\sum_k m_k} \right) = \\ & = \left(\frac{\sum_k x_k \cdot \sqrt{1 + (f'(x_k))^2} \cdot \Delta x_k}{\sum_k \sqrt{1 + (f'(x_k))^2} \cdot \Delta x_k}, \frac{\sum_k f(x_k) \cdot \sqrt{1 + (f'(x_k))^2} \cdot \Delta x_k}{\sum_k \sqrt{1 + (f'(x_k))^2} \cdot \Delta x_k} \right), \end{aligned}$$

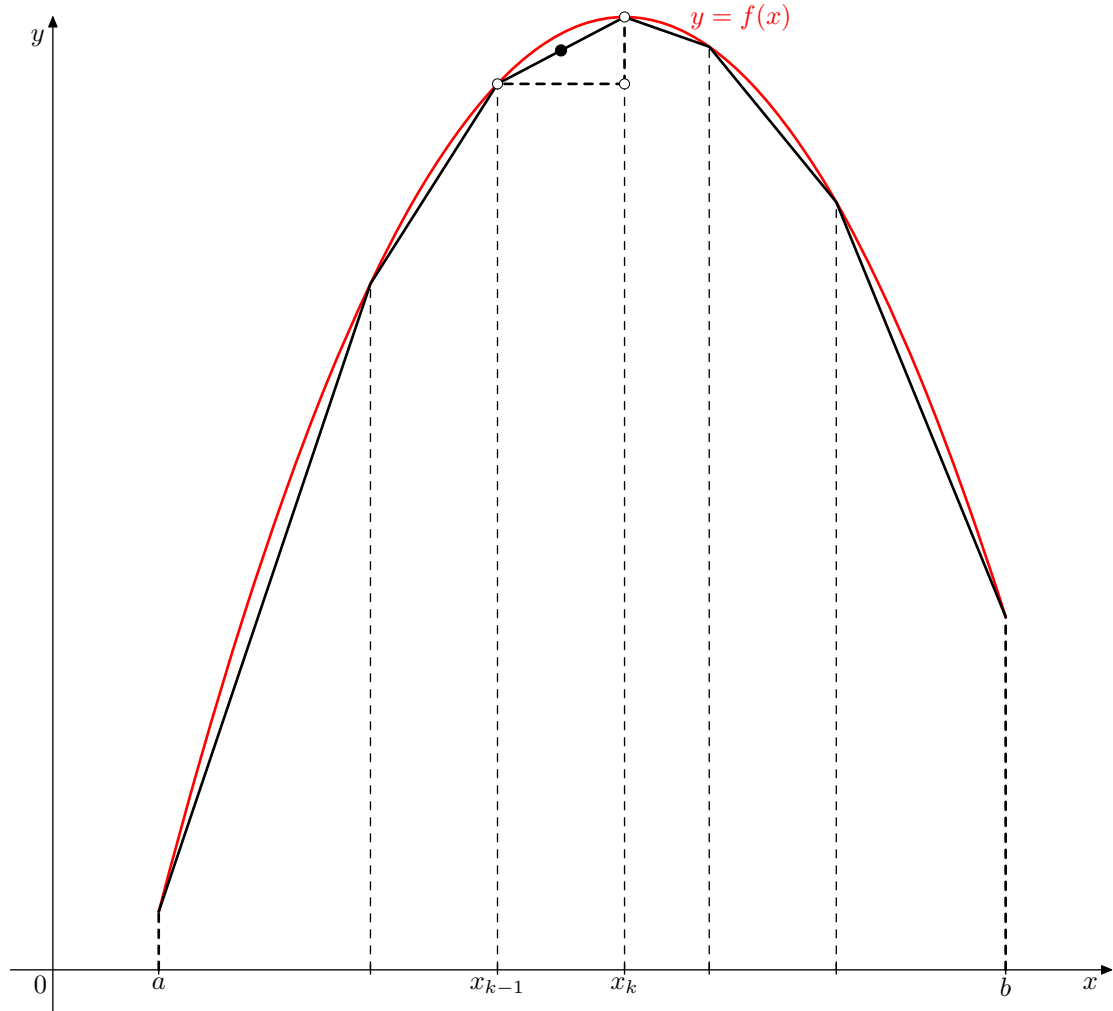
¹²³Dokładniej: zakładamy, że $f \in C^1[a, b]$, czyli f jest różniczkowalna na przedziale $[a, b]$ – z pochodnymi jednostronnymi na końcach, gdzie dodatkowo zakładamy, że pochodna funkcji f jest ciągła i ma w punktach a, b granice równe odpowiednim pochodnym jednostronnym.

¹²⁴Wiem, wiem, jestem niekonsekwentny – jak jest przedział, to powinna mu odpowiadać cięciwa.

¹²⁵Zobacz korona09, strona 86.

co przy nieskończeniu małych przedziałikach daje dokładne położenie środka ciężkości krzywej wyrażone przy pomocy całek:

$$\left(\frac{\int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}, \frac{\int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx} \right).$$



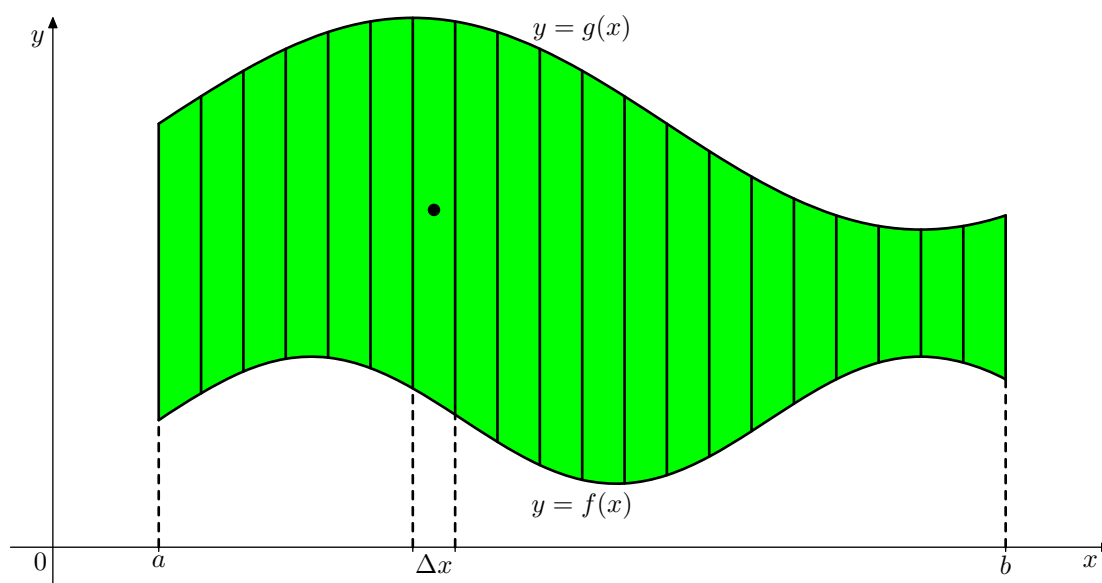
rys. 42

Obejrzyj w internecie wykład doc. Górniaka z PWr:

Odcinek 79: Obliczanie objętości brył obrotowych

A teraz przedstawię wyprowadzenie wzorów związanych z przestrzennymi figurami obrotowymi. Nie stawiam sobie za cel matematycznej precyzji, a zależy mi jedynie na pokazaniu dlaczego wzory są takie, a nie inne. Wykład będzie utrzymany w konwencji rozumowań stosowanych w fizyce.

Bryły obrotowe.



rys. 43

Podzielmy obszar przedstawiony na rysunku 43 na wąskie paski¹²⁶.

Obracając wokół osi OX pasek¹²⁷ wyróżniony na rysunku otrzymamy gruby pierścień kołowy o promieniu wewnętrznym $f(x)$, promieniu zewnętrznym $g(x)$ oraz grubości Δx . Zatem pasek ten przy obrocie omiata objętość równą $\pi \cdot (g^2(x) - f^2(x)) \cdot \Delta x$. Objętość całej bryły obrotowej możemy więc przybliżyć przez sumę po wszystkich paskach:

$$\pi \cdot \sum (g^2(x) - f^2(x)) \cdot \Delta x,$$

co przy nieskończeniu cienkich paskach cudownie przemienia się w całkę

$$V_{OX} = \pi \cdot \int_a^b g^2(x) - f^2(x) dx.$$

Jest to wzór na objętość bryły powstałej przez obrót obszaru wokół osi OX .

¹²⁶Nie będę ich numerować, a znak sumy odnosić się będzie do sumowania po wszystkich paskach podziału, ile ich tam jest.

¹²⁷Dla celów rachunkowych przyjmujemy, że pasek ten jest (prawie) prostokątem.

Środek ciężkości rozważanej bryły obrotowej leży oczywiście na osi OX , a jego współrzędna x -owa jest w przybliżeniu równa

$$\frac{\pi \cdot \sum \mathbf{x} \cdot (g^2(x) - f^2(x)) \cdot \Delta x}{\pi \cdot \sum (g^2(x) - f^2(x)) \cdot \Delta x},$$

co po przejściu granicznym daje dokładny wzór:

$$x_s = \frac{\int_a^b x \cdot (g^2(x) - f^2(x)) \, dx}{\int_a^b (g^2(x) - f^2(x)) \, dx}.$$

Z kolei obrót tegoż paska wokół osi OY prowadzi do grubej powierzchni walcowej o promieniu x , tworzącej¹²⁸ $g(x) - f(x)$ oraz grubości Δx , co daje objętość

$$2\pi \cdot x \cdot (g(x) - f(x)) \cdot \Delta x.$$

To prowadzi do wzoru na objętość bryły obrotowej

$$2\pi \cdot \sum x \cdot (g(x) - f(x)) \cdot \Delta x \rightarrow 2\pi \cdot \int_a^b x \cdot (g(x) - f(x)) \, dx = V_{OY}.$$

Współrzędna y -kowa środka ciężkości rozważanego paska jest równa

$$\frac{g(x) + f(x)}{2},$$

co prowadzi do współrzędnej y -kowej środka ciężkości całej bryły obrotowej:

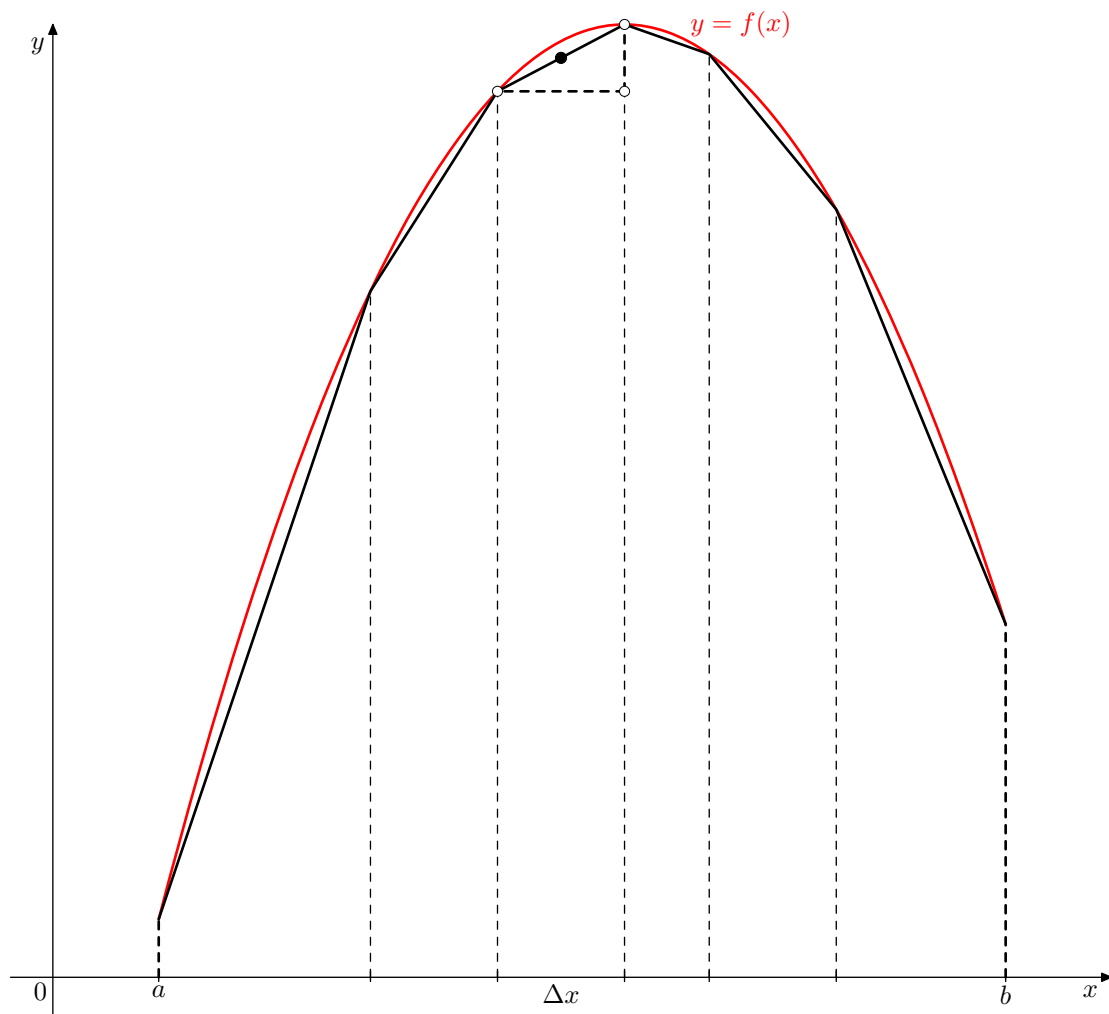
$$\frac{2\pi \cdot \sum \frac{g(x)+f(x)}{2} \cdot x \cdot (g(x) - f(x)) \cdot \Delta x}{2\pi \cdot \sum x \cdot (g(x) - f(x)) \cdot \Delta x} \rightarrow \frac{\int_a^b x \cdot (g^2(x) - f^2(x)) \, dx}{2 \cdot \int_a^b x \cdot (g(x) - f(x)) \, dx} = y_s.$$

¹²⁸Chodzi o długość tworzącej walca.

Powierzchnie obrotowe.

Aby móc obliczać pole powierzchni powstałej przez obrót wykresu funkcji, założymy, że funkcja ta jest gładka, czyli w tym wypadku różniczkowalna i ma ciągłą pochodną.

Trzeba sobie bowiem wyobrazić, że objętość jabłka zależy od jego rozmiaru, a nie od tego, czy jest ono świeże, czy zwiędnięte i ma pomarszczoną skórkę. Za to gładkość skórki ma decydujący wpływ na powierzchnię tejże skórki, a za gładkość odpowiada pochodna.



rys. 44

Przybliżmy wykres funkcji łamaną (rys. 44). Rozważany segment łamanej ma w przybliżeniu długość

$$\sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot \Delta x.$$

Przy obrocie wokół osi OX rozważany odcinek zakreśla fragment powierzchni stożkowej o tworzącej długości $\sqrt{1+(f'(x))^2} \cdot \Delta x$ i promieniu $f(x)$, a więc polu powierzchni

$$2\pi \cdot f(x) \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} \cdot \Delta x.$$

To prowadzi do wzoru na pole całej powierzchni obrotowej:

$$2\pi \cdot \sum f(x) \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} \cdot \Delta x \rightarrow 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} dx = P_{OX}.$$

Współrzędna x -owa środka ciężkości odcinka łamanej jest równa x , skąd otrzymujemy wzór na współrzędną x -ową środka ciężkości całej powierzchni obrotowej:

$$\frac{2\pi \cdot \sum \mathbf{x} \cdot f(x) \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} \cdot \Delta x}{2\pi \cdot \sum f(x) \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} \cdot \Delta x} \rightarrow \frac{\int_a^b x \cdot f(x) \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} dx}{\int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} dx} = x_s.$$

Przy obrocie wokół osi OY rozważany odcinek zakreśla fragment powierzchni stożkowej o tworzącej długości $\sqrt{1+(f'(x))^2} \cdot \Delta x$ i promieniu x , a więc polu powierzchni

$$2\pi \cdot x \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} \cdot \Delta x.$$

To prowadzi do wzoru na pole całej powierzchni obrotowej:

$$2\pi \cdot \sum x \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} \cdot \Delta x \rightarrow 2\pi \cdot \int_a^b x \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} dx = P_{OY}.$$

Współrzędna y -kowa środka ciężkości odcinka łamanej jest równa $f(x)$, skąd otrzymujemy wzór na współrzędną y -kową środka ciężkości całej powierzchni obrotowej:

$$\frac{2\pi \cdot \sum \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot x \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} \cdot \Delta x}{2\pi \cdot \sum x \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} \cdot \Delta x} \rightarrow \frac{\int_a^b x \cdot f(x) \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} dx}{\int_a^b x \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} dx} = y_s.$$

Obejrzyj w internecie wykład doc. Górniaka z PWr:

Odcinek 81: Obliczanie pól powierzchni brył obrotowych.

Wzory na długości, pola, objętości i środki ciężkości

Musisz znać wzory (*). Pozostałe wzory, czyli (???), musisz umieć rozpoznać¹²⁹ w poniższym spisie i umieć je zastosować.

$$P = \int_a^b g(x) - f(x) dx \quad (*)$$

$$\left(\frac{\int_a^b x \cdot (g(x) - f(x)) dx}{\int_a^b g(x) - f(x) dx}, \frac{\frac{1}{2} \cdot \int_a^b (g(x))^2 - (f(x))^2 dx}{\int_a^b g(x) - f(x) dx} \right) \quad (???)$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad (*)$$

$$\left(\frac{\int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}, \frac{\int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx} \right) \quad (???)$$

$$V_{OX} = \pi \cdot \int_a^b g^2(x) - f^2(x) dx \quad x_s = \frac{\int_a^b x \cdot (g^2(x) - f^2(x)) dx}{\int_a^b g^2(x) - f^2(x) dx} \quad (???)$$

$$V_{OY} = 2\pi \cdot \int_a^b x \cdot (g(x) - f(x)) dx \quad y_s = \frac{\int_a^b x \cdot (g^2(x) - f^2(x)) dx}{2 \cdot \int_a^b x \cdot (g(x) - f(x)) dx} \quad (???)$$

$$P_{OX} = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad x_s = \frac{\int_a^b x \cdot f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}{\int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx} \quad (???)$$

$$P_{OY} = 2\pi \cdot \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad y_s = \frac{\int_a^b x \cdot f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}{\int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx} \quad (???)$$

¹²⁹Czyli wiedzieć który czego dotyczy i rozumieć, jakich założeń wymaga. Konieczne założenia mogą dotyczyć ciągłości/różniczkowalności oraz nieujemności funkcji, a także nieujemności granic całkowania.

Przykład 58:

Wiadomo, że dla funkcji różniczkowalnej $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $0 \leq a < b$, pole powierzchni powstałej przez obrót krzywej

$$\{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}$$

wokół osi OY jest równe

$$2\pi \cdot \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Wyznaczyć pole powierzchni

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z \leq 1\}.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ dana w zadaniu paraboloida obrotowa powstaje przez obrót wokół osi OZ łuku paraboli o równaniu $z = x^2$, $0 \leq x \leq 1$, umieszczonego w płaszczyźnie XZ , przyjmiemy w podanym wzorze $f(x) = x^2$, $a = 0$, $b = 1$.

Biorąc pod uwagę, że $f'(x) = 2x$ oraz wykonując po drodze podstawienie $t = 1 + 4x^2$, czyli formalnie $dt = 8x dx$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} 2\pi \cdot \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx &= 2\pi \cdot \int_0^1 x \cdot \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{\pi}{4} \cdot \int_1^5 \sqrt{t} dt = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot t^{3/2} \Big|_{t=1}^5 = \frac{\pi}{6} \cdot t^{3/2} \Big|_{t=1}^5 = \\ &= \frac{\pi}{6} \cdot 5^{3/2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \cdot (5\sqrt{5} - 1). \end{aligned}$$

Odpowiedź: Pole danej w zadaniu powierzchni obrotowej jest równe $\frac{\pi}{6} \cdot (5\sqrt{5} - 1)$.