

Egzamin, 6.02.2025, godz. 9:00–11:00**Zadanie 1 (10 punktów)**

Jakie największe pole może mieć trójkąt jak na rysunku obok? Dwa wierzchołki to $(0, 0)$ i $(1, 1)$, a trzeci wierzchołek leży na fragmencie paraboli o równaniu $y = x^2$ odpowiadającym $x \in (0, 1)$.

Wskazówka: Można bez dowodu skorzystać ze wzoru na pole trójkąta o wierzchołkach $(0, 0)$, $(1, 1)$ i (a, b) : $\text{POLE} = \frac{|a-b|}{2}$.

Rozwiązanie:

Niech (a, a^2) , gdzie $a \in (0, 1)$, będzie wierzchołkiem trójkąta leżącym na paraboli.

Wówczas pole trójkąta jest równe $P(a) = \frac{a-a^2}{2}$.

Zauważmy, że

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} P(a) = \lim_{a \rightarrow 1^-} P(a) = 0,$$

a ponadto

$$P'(a) = 1 - 2a.$$

Wobec tego $P'(a) = 0$ dla $a = 1/2$, co prowadzi do maksymalnej wartości pola trójkąta równej

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{8}.$$

Odpowiedź: Największe możliwe pole trójkąta wynosi $1/8$.

Zadanie 2 (10 punktów)

Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{3n+2}{n} > \frac{3}{4} \cdot 6^n.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

Dla $n = 1$ mamy $\binom{3n+2}{n} = \binom{5}{1} = 5$ oraz $\frac{3}{4} \cdot 6^n = 9/2 = 4\frac{1}{2}$, a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $5 > 4,5$, jest więc prawdziwa.

Zanim przystąpimy do dalszej części rozwiązania, przepisujemy dowodzoną nierówność w postaci:

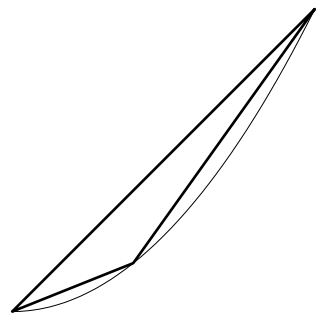
$$\frac{(3n+2)!}{n! \cdot (2n+2)!} > \frac{3}{4} \cdot 6^n.$$

Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$\frac{(3n+2)!}{n! \cdot (2n+2)!} > \frac{3}{4} \cdot 6^n.$$

Chcemy wykazać, że

$$\frac{(3n+5)!}{(n+1)! \cdot (2n+4)!} > \frac{3}{4} \cdot 6^{n+1}.$$



Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$\begin{aligned} L &= \frac{(3n+5)!}{(n+1)! \cdot (2n+4)!} = \frac{(3n+2)! \cdot (3n+3) \cdot (3n+4) \cdot (3n+5)}{n! \cdot (2n+2)! \cdot (n+1) \cdot (2n+3) \cdot (2n+4)} = \\ &= \frac{(3n+2)!}{n! \cdot (2n+2)!} \cdot \frac{(3n+3) \cdot (3n+4) \cdot (3n+5)}{(n+1) \cdot (2n+3) \cdot (2n+4)} > \frac{3}{4} \cdot 6^n \cdot \frac{3 \cdot (3n+4) \cdot (3n+5)}{(2n+3) \cdot (2n+4)} \geqslant \\ &\geqslant \frac{3}{4} \cdot 6^n \cdot 6 = \frac{3}{4} \cdot 6^{n+1} = P, \end{aligned}$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{3 \cdot (3n+4) \cdot (3n+5)}{(2n+3) \cdot (2n+4)} \geqslant 6.$$

Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom

$$\begin{aligned} \frac{(3n+4) \cdot (3n+5)}{(2n+3) \cdot (2n+4)} &\geqslant 2, \\ (3n+4) \cdot (3n+5) &\geqslant 2 \cdot (2n+3) \cdot (2n+4), \\ 9n^2 + 27n + 20 &\geqslant 8n^2 + 28n + 24, \\ n^2 &\geqslant n + 4, \\ n^2 - n + \frac{1}{4} &\geqslant 4,25, \\ \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 &\geqslant 4,25 = \left(3 - \frac{1}{2}\right)^2 - 2, \end{aligned}$$

a więc dowodzona nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 3$.

To oznacza, że pierwszą implikacją udowodnioną drugim krokiem indukcyjnym jest, zapisując symbolicznie, implikacja $T(3) \Rightarrow T(4)$.

Przeprowadzone na początku rozwiązania sprawdzenie dla $n = 1$ okazuje się nie mieć związku z indukcją, ale jest częścią rozwiązania, bo mamy udowodnić nierówność także dla $n = 1$.

Dla zakończenia rozwiązania musimy sprawdzić dowodzoną nierówność dla $n = 2$ (bo tego przypadku nie obejmuje dowód indukcyjny) oraz dla $n = 3$ (żeby indukcja w ogóle ruszyła – to sprawdzenie przejmuje rolę pierwszego kroku indukcyjnego).

Dla $n = 2$ mamy $\binom{3n+2}{n} = \binom{8}{2} = 28$ oraz $\frac{3}{4} \cdot 6^n = \frac{3}{4} \cdot 36 = 27$, a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $28 > 27$.

Dla $n = 3$ mamy

$$\binom{3n+2}{n} = \binom{11}{3} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{6} = 11 \cdot 5 \cdot 3 = 11 \cdot 15 = 165$$

oraz $\frac{3}{4} \cdot 6^n = \frac{3}{4} \cdot 216 = 162$, a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $165 > 162$.

Uwaga:

Sprawdzenie dla $n = 3$ nie wydaje się wymagać wiele pracy, jednak **brak świadomości** konieczności wykonania tego sprawdzenia jest bardzo poważnym błędem, demaskującym niezrozumienie istoty dowodu indukcyjnego. W takim przypadku **punktacja powinna być mocno obniżona**.

Zadanie **3** (10 punktów)

Udowodnij, że liczba $\log_{(27/25)}\left(\frac{5}{9}\right)$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_{(27/25)}\left(\frac{5}{9}\right)$ jest wymierna i niech będzie ona równa $-m/n$, gdzie m, n są liczbami naturalnymi (**zauważmy, że jest to liczba ujemna, bo podstawa logarytmu jest większa od 1, a liczba logarytmowana jest mniejsza od 1**). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned}\log_{(27/25)}\left(\frac{5}{9}\right) &= -\frac{m}{n}, \\ \left(\frac{27}{25}\right)^{-m/n} &= \frac{5}{9}, \\ \left(\frac{27}{25}\right)^{-m} &= \left(\frac{5}{9}\right)^n, \\ \left(\frac{25}{27}\right)^m &= \left(\frac{5}{9}\right)^n, \\ 25^m \cdot 9^n &= 5^n \cdot 27^m.\end{aligned}$$

Wykażemy, że powyższe równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych m, n .

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy $3^{2n} \cdot 5^{2m} = 3^{3m} \cdot 5^n$.

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 2n &= 3m \\ 2m &= n \end{cases}$$

Jednak powyższy układ równań nie ma rozwiązań w liczbach dodatnich m, n , gdyż dla każdego rozwiązania w liczbach rzeczywistych m, n mamy

$$3m = 2n = 4m,$$

skąd $m = 0$.

Doszliśmy do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{(27/25)}\left(\frac{5}{9}\right)$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{(27/25)}\left(\frac{5}{9}\right)$ jest niewymierna.

Uwaga:

Ponieważ korzystamy z jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze liczb naturalnych, **błędne** jest każde rozwiązanie oparte na rozkładzie, w którym:

- zamiast rozkładu na czynniki pierwsze występuje rozkład z potęgami liczb złożonych, lub
- występują wykładniki, o których nie wiadomo, że są całkowite i nieujemne.

W takim przypadku punktacja powinna być bardzo mocno obniżona.

Zadanie **4** (10 punktów)

Wyznacz (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{\sqrt{n^2+12n+37}-n:n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Rozwiązanie:

Przekształcając wyrażenie definiujące dany w zadaniu zbiór otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+12n+37}-n &= \sqrt{n^2+12n+37}-(n+6)+6 = \frac{n^2+12n+37-(n+6)^2}{\sqrt{n^2+12n+37}+(n+6)}+6 = \\ &= \frac{n^2+12n+37-n^2-12n-36}{\sqrt{n^2+12n+37}+(n+6)}+6 = \frac{1}{\sqrt{n^2+12n+37}+(n+6)}+6.\end{aligned}$$

Z otrzymanej postaci wynika, że podane wyrażenie maleje wraz z n , a przy $n\rightarrow\infty$ dąży do 6.

Dla zakończenia rozwiązania wystarczy odnotować, że w ciągu malejącym pierwszy wyraz (tu równy $\sqrt{50}-1$) jest największy, a kresem dolnym zbioru wyrazów jest granica ciągu.

Odpowiedź: Kres górny danego zbioru jest równy $\sqrt{50}-1=5\sqrt{2}-1$, a kres dolny 6.

Zadanie **5** (10 punktów)

Niech funkcja $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x) = 4 \ln x - \sqrt[5]{x}.$$

Rozstrzygnij, która z liczb (obydwie $\approx 78,70703\,63727\,20384$) jest większa:

$f\left(10^7\right)+f\left(10^7+2\right)=f\left(10\,000\,000\right)+f\left(10\,000\,002\right)$ czy $2 \cdot f\left(10\,000\,001\right)=2 \cdot f\left(10^7+1\right) \text{ ?}$

Rozwiązanie:

Różniczkując dwukrotnie funkcję f otrzymujemy

$$f'(x) = \frac{4}{x} - \frac{1}{5 \cdot x^{4/5}}$$

oraz

$$f''(x) = -\frac{4}{x^2} + \frac{4}{25 \cdot x^{9/5}},$$

skąd nierówność $f''(x) > 0$ jest równoważna kolejnym nierównościom

$$\begin{aligned} -\frac{4}{x^2} + \frac{4}{25 \cdot x^{9/5}} &> 0, \\ \frac{4}{25 \cdot x^{9/5}} &> \frac{4}{x^2}, \\ x^{1/5} &> 25, \\ x &> 5^{10}. \end{aligned}$$

Zatem f jest ściśle wypukła w przedziale $(5^{10}, \infty)$, skąd

$$f(x) + f(y) > 2 \cdot f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych dodatnich $x, y > 5^{10}$.

W szczególności

$$f(10\,000\,000) + f(10\,000\,002) > 2 \cdot f(10\,000\,001),$$

gdyż

$$5^{10} = 5^3 \cdot 5^7 = 125 \cdot 5^7 < 128 \cdot 5^7 = 2^7 \cdot 5^7 = 10^7 = 10\,000\,000,$$

Zadanie **6** (10 punktów)

Dana jest funkcja $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \ln(x^7 + 3).$$

Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych nieujemnych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leqslant 4 \cdot |x - y|.$$

Rozwiązanie:

Dla $x = y$ dowiedzona nierówność jest oczywista, natomiast przy $x \neq y$ z twierdzenia Lagrange’a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)| \cdot |x - y|,$$

gdzie c jest pewną liczbą leżącą między x i y .

Rozwiązanie zadania będzie zakończone, jeśli wykazemy, że dla każdej liczby rzeczywistej $x > 0$ zachodzi nierówność

$$|f'(x)| \leqslant 4,$$

czyli

$$\frac{7x^6}{x^7+3} \leqslant 4. \tag{♠}$$

Nierówność (♠) można udowodnić różnymi sposobami.

Sposób I:

Wyliczamy

$$f''(x) = \frac{42x^5 \cdot (x^7+3) - 49x^{12}}{(x^7+3)^2} = \frac{-7x^{12} + 42 \cdot 3 \cdot x^5}{(x^7+3)^2} = \frac{7x^5 \cdot (18 - x^7)}{(x^7+3)^2}.$$

Stąd wynika, że $f''(\sqrt[7]{18}) = 0$, a ponadto $f''(x) > 0$, gdy $x \in (0, \sqrt[7]{18})$ oraz $f''(x) < 0$, gdy $x > \sqrt[7]{18}$.

Wobec tego funkcja f' jest dodatnia i rosnąca na przedziale $(0, \sqrt[7]{18}]$ oraz dodatnia i malejąca na przedziale $[\sqrt[7]{18}, \infty)$. W konsekwencji przyjmuje ona w punkcie $\sqrt[7]{18}$ wartość największą. Ponieważ

$$f'(\sqrt[7]{18}) = \frac{7 \cdot 18^{6/7}}{21} = \sqrt[7]{2^6 \cdot 3^5} = \sqrt[7]{2^6 \cdot 243} < \sqrt[7]{2^6 \cdot 256} = \sqrt[7]{2^6 \cdot 2^8} = \sqrt[7]{2^{14}} = 4,$$

nierówność (♠) jest udowodniona.

Sposób II:

Dowodzoną nierówność (♠) możemy przepisać w postaci

$$4x^7 - 7x^6 + 12 \geqslant 0,$$

co sprowadza się do udowodnienia, że funkcja $g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$g(x) = 4x^7 - 7x^6 + 12$$

przyjmuje tylko wartości nieujemne. Ponieważ

$$g'(x) = 28x^6 - 42x^5 = 14x^5 \cdot (2x - 3),$$

stwierdzamy, że funkcja g' jest ujemna w przedziale $(0, 3/2)$ i dodatnia w przedziale $(3/2, \infty)$. Zatem funkcja g jest malejąca w przedziale $[0, 3/2]$ i rosnąca w przedziale $[3/2, \infty)$, przyjmuje więc najmniejszą wartość w punkcie $3/2$. Pozostaje wykazać, że $g(3/2) \geqslant 0$, co robimy następująco:

$$\begin{aligned} g\left(\frac{3}{2}\right) &= 4 \cdot \frac{3^7}{2^7} - 7 \cdot \frac{3^6}{2^6} + 12 = \frac{2 \cdot 3^7 - 7 \cdot 3^6 + 12 \cdot 64}{64} = \frac{6 \cdot 3^6 - 7 \cdot 3^6 + 3 \cdot 256}{64} = \frac{-3^6 + 3 \cdot 256}{64} = \\ &= \frac{-3 \cdot 3^5 + 3 \cdot 256}{64} = \frac{-3 \cdot 243 + 3 \cdot 256}{64} = \frac{3 \cdot 13}{64} > 0. \end{aligned}$$

Zadanie **7** (ZADANIE DODATKOWE)

Funkcja ciągła $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ spełnia dla każdej liczby rzeczywistej x warunek

$$f(f(f(x)))=x\,.$$

(3-krotne złożenie jest identycznością)

Udowodnij, że wówczas dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $f(x)=x$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że zgodnie z warunkami zadania funkcja f jest różnowartościowa. Jeżeli bowiem x i y są takimi liczbami, że $f(x)=f(y)$, to

$$x=f(f(f(x)))=f(f(f(y)))=y\,.$$

Ponieważ ciągła funkcja różnowartościowa określona na przedziale (dziedzinie w jednym kawałku) musi być ściśle monotoniczna, do rozważenia pozostają dwa przypadki:

1° Funkcja f jest malejąca. Wówczas $f\circ f$ jest rosnąca, a $f\circ f\circ f$ malejąca. Jednak funkcja identycznościowa jest rosnąca, więc w tym wypadku $f\circ f\circ f$ nie może być identycznością.

2° Funkcja f jest rosnąca. Jeśli f nie byłaby identycznością, to istniałoby takie x_0 , że $f(x_0)\neq x_0$, przyjmijmy dla ustalenia uwagi, że $f(x_0)>x_0$ – rozważania w przypadku nierówności przeciwnej różnią się tylko kierunkiem nierówności.

Oznaczmy $x_{n+1}=f(x_n)$.

Wówczas

$$x_1=f(x_0)>x_0\,.$$

Skoro $x_1>x_0$, a funkcja f jest rosnąca, to

$$x_2=f(x_1)>f(x_0)=x_1>x_0\,.$$

Analogicznie z nierówności $x_2>x_1$ wynika

$$x_3=f(x_2)>f(x_1)=x_2>x_1>x_0\,.$$

Otrzymaliśmy więc nierówność $x_3>x_0$, sprzeczną z warunkami zadania, które mówią, że

$$x_3=f(f(f(x_0)))=x_0\,.$$

Zadanie **8** (ZADANIE DODATKOWE)

Funkcja $f \in C^3(\mathbb{R})$ (tzn. mająca na całej prostej ciągłe pochodne do trzeciego rzędu włącznie) spełnia dla każdej liczby rzeczywistej x warunek $f'''(x) > 0$. Udowodnij, że wówczas

$$f(0) + 3f(2) < 3f(1) + f(3) \, .$$

Wskazówka: Zbadaj wypukłość/wkłęśłość funkcji $g(x) = f(x + 1) - f(x)$.

Rozwiązanie:

Ponieważ funkcja f''' jest dodatnia, funkcja f'' jest rosnąca. Zatem

$$g''(x) = f''(x + 1) - f''(x) > 0 \, ,$$

skąd wynika, że funkcja g jest ściśle wypukła.

Wobec tego dla każdych różnych liczb rzeczywistych x i y zachodzi nierówność

$$g(x) + g(y) > 2 \cdot g\left(\frac{x + y}{2}\right) \, .$$

W szczególności dla $x = 0$ i $y = 2$ otrzymujemy

$$g(0) + g(2) > 2 \cdot g(1) \, ,$$

co po skorzystaniu z definicji funkcji g prowadzi kolejno do:

$$\begin{aligned} f(1) - f(0) + f(3) - f(2) &> 2f(2) - 2f(1) \, , \\ 3f(1) + f(3) &> f(0) + 3f(2) \, , \end{aligned}$$

a to jest nierówność, którą należało udowodnić.

Uwaga:

Chociaż czynnik 3 występujący po obu stronach dowodzonej nierówności wygląda na wzięty z sufitu, to jest on nienegocjowalny (trójkąt Pascala). Mamy bowiem (przy $a > 0$):

Wyrażenie	Kiedy zawsze zerowe?	Kiedy na pewno dodatnie?
$f(x)$	funkcja zerowa, $f = 0$	funkcja dodatnia
$f(x + a) - f(x)$	funkcja stała, $f' = 0$	funkcja rosnąca, $f' > 0$
$f(x + 2a) - 2f(x + a) + f(x)$	funkcja liniowa, $f'' = 0$	funkcja ściśle wypukła, $f'' > 0$
$f(x + 3a) - 3f(x + 2a) +$ $+ 3f(x + a) - f(x)$	wielomian stopnia ≤ 2 , $f''' = 0$	$f''' > 0$
$f(x + 4a) - 4f(x + 3a) +$ $+ 6f(x + 2a) - 4f(x + a) + f(x)$	wielomian stopnia ≤ 3 , $f^{(4)} = 0$	$f^{(4)} > 0$
$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot (-1)^k \cdot f\left(x + (n - k)a\right)$	wielomian stopnia $\leq n - 1$, $f^{(n)} = 0$	$f^{(n)} > 0$