

Zadanie 1 (10 punktów)

Jakie największe pole może mieć trójkąt jak na rysunku obok? Dwa wierzchołki to $(0, 0)$ i $(1, 1)$, a trzeci wierzchołek leży na fragmencie paraboli o równaniu $y = x^2$ odpowiadającym $x \in (0, 1)$.

Wskazówka: Można bez dowodu skorzystać ze wzoru na pole trójkąta o wierzchołkach $(0, 0)$, $(1, 1)$ i (a, b) : $\text{POLE} = \frac{|a-b|}{2}$.

Zadanie 2 (10 punktów)

Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{3n+2}{n} > \frac{3}{4} \cdot 6^n.$$

Zadanie 3 (10 punktów)

Udowodnij, że liczba $\log_{(27/25)} \left(\frac{5}{9} \right)$ jest niewymierna.

Zadanie 4 (10 punktów)

Wyznacz (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{ \sqrt{n^2 + 12n + 37} - n : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Zadanie 5 (10 punktów)

Niech funkcja $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x) = 4 \ln x - \sqrt[5]{x}.$$

Rozstrzygnij, która z liczb (obydwie $\approx 78,70703\,63727\,20384$) jest większa:

$$f(10^7) + f(10^7 + 2) = f(10\,000\,000) + f(10\,000\,002) \quad \text{czy} \quad 2 \cdot f(10\,000\,001) = 2 \cdot f(10^7 + 1) ?$$

Zadanie 6 (10 punktów)

Dana jest funkcja $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \ln(x^7 + 3).$$

Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych nieujemnych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq 4 \cdot |x - y|.$$

Zadanie 7 (ZADANIE DODATKOWE)

Funkcja ciągła $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia dla każdej liczby rzeczywistej x warunek

$$f(f(f(x))) = x. \quad (3\text{-krotne złożenie jest identycznością})$$

Udowodnij, że wówczas dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $f(x) = x$.

Zadanie 8 (ZADANIE DODATKOWE)

Funkcja $f \in C^3(\mathbb{R})$ (tzn. mająca na całej prostej ciągle pochodne do trzeciego rzędu włącznie) spełnia dla każdej liczby rzeczywistej x warunek $f'''(x) > 0$. Udowodnij, że wówczas

$$f(0) + 3f(2) < 3f(1) + f(3).$$

Wskazówka: Zbadaj wypukłość/wklęsłość funkcji $g(x) = f(x+1) - f(x)$.

