

ANALIZA 1

EGZAMIN

6 lutego 2025 r., godz. 11:20–13:20

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadanie 13 to zadanie dodatkowe.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Z ułamków nie trzeba wyłączać części całkowitej:
np. wystarczy podać $\frac{77}{3}$, ale $25\frac{2}{3}$ też będzie uznane.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry

NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

1. Podaj kres górny zbioru.

$$\text{a) } \sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 8m^3 \leq 27n^3 \right\} = \sqrt[3]{\log_8 27} = \boxed{\sqrt[3]{\log_2 3} + 1 \text{ punkt}}$$

$$\text{b) } \sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3m^2 \leq 81n^2 \right\} = \mathbf{2}$$

$$\text{c) } \sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2m^3 \leq 32n^3 \right\} = \sqrt[3]{5}$$

$$\text{d) } \sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 9m^2 \leq 49n^2 \right\} = \sqrt{\log_9 49} = \boxed{\sqrt{\log_3 7} + 1 \text{ punkt}}$$

2. Zapisz w postaci przedziału dziedzinę funkcji f określonej podanym wzorem.

$$\text{a) } f(x) = \sqrt{\log_7 \log_5 \log_2 x}, \quad D_f = [\mathbf{32}, \infty)$$

$$\text{b) } f(x) = \sqrt{\log_5 \log_4 \log_3 x}, \quad D_f = [\mathbf{81}, \infty)$$

$$\text{c) } f(x) = \sqrt{\log_3 \log_3 \log_2 x}, \quad D_f = [\mathbf{8}, \infty)$$

$$\text{d) } f(x) = \sqrt{\log_2 \log_2 \log_3 x}, \quad D_f = [\mathbf{9}, \infty)$$

3. Dla podanej liczby k podaj taką liczbę naturalną $n > k$, że $\binom{n}{k} = \binom{n}{4k}$.

$$\text{a) } k = 5, \quad n = \mathbf{25}$$

$$\text{b) } k = 4, \quad n = \mathbf{20}$$

$$\text{c) } k = 111, \quad n = \mathbf{555}$$

$$\text{d) } k = 10, \quad n = \mathbf{50}$$

4. Podaj wzór na pochodną funkcji.

$$\text{a) } \frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt[4]{5x^5 + 1}} = -\frac{\mathbf{25x^4}}{4 \cdot (5x^5 + 1)^{5/4}}$$

$$\text{b) } \frac{d}{dx} \ln(e^{2x} + x^7) = \frac{\mathbf{2e^{2x} + 7x^6}}{e^{2x} + x^7}$$

$$\text{c) } \frac{d}{dx} \ln \cos x = -\frac{\sin x}{\cos x} = \boxed{-\mathbf{\operatorname{tg} x} + 1 \text{ punkt}}$$

$$\text{d) } \frac{d}{dx} \operatorname{arctg}(x \cdot \sqrt{x}) = \frac{\mathbf{3 \cdot \sqrt{x}}}{\mathbf{2 \cdot (x^3 + 1)}}$$

5. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1 + 2x)} = \mathbf{1/2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(1 + 4x)} = \mathbf{1/2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{\ln(1 + 6x)} = \mathbf{2/3}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{16x} - 1}{\ln(1 + 8x)} = \mathbf{2}$

6. Niech x_k będzie taką liczbą, że punkt (x_k, x_k) leży na prostej stycznej w punkcie (k, k^2) do paraboli o równaniu $y = x^2$. Wówczas:

a) $x_4 = \mathbf{16/7}$

b) $x_3 = \mathbf{9/5}$

c) $x_2 = \mathbf{4/3}$

d) $x_5 = \mathbf{25/9}$

7. Podaj liczbę podzbiorów A zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ spełniających warunki $\forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (n+2) \in A)$ oraz

a) $11, 16 \in A \quad \mathbf{48}$

b) $10, 15 \in A \quad \mathbf{40}$

c) $13, 18 \in A \quad \mathbf{63}$

d) $12, 17 \in A \quad \mathbf{54}$

8. Niech g będzie funkcją odwrotną do funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem $f(x) = x^3 + 5x + 3$. Podaj wartość pochodnej.

a) $g'(45) = \mathbf{1/32}$

b) $g'(3) = \mathbf{1/5}$

c) $g'(9) = \mathbf{1/8}$

d) $g'(21) = \mathbf{1/17}$

9. Niech $f(x) = x^{100} \cdot e^{x^{33}}$. Podaj wartość pochodnej danego rzędu.

a) $f^{(199)}(0) = \mathbf{199!/3! = 199!/6}$

b) $f^{(463)}(0) = \mathbf{463!/11!}$

c) $f^{(430)}(0) = \mathbf{430!/10!}$

d) $f^{(760)}(0) = \mathbf{760!/20!}$

10. Niech

$$G(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n^2+n+2} + \frac{n+4}{n^2+n+4} + \dots + \frac{n+2k}{n^2+n+2k} + \dots + \frac{pn}{n^2+pn} \right).$$

Wówczas

- a) $G(3) = \mathbf{2}$ b) $G(5) = \mathbf{6}$ c) $G(7) = \mathbf{12}$ d) $G(9) = \mathbf{20}$

11. Podaj sumę szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3^n}}{99^n} = \mathbf{-1/98}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^4}}{99^n} = \mathbf{-1/100}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{80^n} = \mathbf{-1/81}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{80^n} = \mathbf{1/79}$

12. Podaj sumę szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{n+48}{n}} - \sqrt{\frac{n+50}{n+2}} \right) = \mathbf{10}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{n+48}{n}} - \sqrt{\frac{n+49}{n+1}} \right) = \mathbf{6}$

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{n+48}{n}} - \sqrt{\frac{n+49}{n+1}} \right) = \mathbf{4}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{n+48}{n}} - \sqrt{\frac{n+51}{n+3}} \right) = \mathbf{9 + \sqrt{17}}$

13. Podaj kresy zbioru $Z(A, B) = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge A^{A^m} = B^{B^n} \right\}$.

W tym zadaniu popełniłem błąd - zaliczam odpowiedzi z tym samym błędem, co mój.

a) $\inf Z(8, 64) = +\infty$ (błędne : **2**), $\sup Z(8, 64) = -\infty$ (błędne : **7/3**)

b) $\inf Z(2, 4) = \mathbf{2}$, $\sup Z(2, 4) = \mathbf{3}$

c) $\inf Z(2, 16) = \mathbf{4}$, $\sup Z(2, 16) = \mathbf{6}$

d) $\inf Z(4, 16) = +\infty$ (błędne : **2**), $\sup Z(4, 16) = -\infty$ (błędne : **5/2**)

ANALIZA 1

EGZAMIN

6 lutego 2025 r., godz. 11:20–13:20

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadanie 13 to zadanie dodatkowe.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Z ułamków nie trzeba wyłączać części całkowitej:
np. wystarczy podać $\frac{77}{3}$, ale $25\frac{2}{3}$ też będzie uznane.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry

NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

1. Podaj kres górny zbioru.

a) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^{m^3} \leq 32^{n^3} \right\} = \sqrt[3]{5}$

b) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3^{m^2} \leq 81^{n^2} \right\} = 2$

c) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 8^{m^3} \leq 27^{n^3} \right\} = \sqrt[3]{\log_8 27} = \boxed{\sqrt[3]{\log_2 3} + 1 \text{ punkt}}$

d) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 9^{m^2} \leq 49^{n^2} \right\} = \sqrt{\log_9 49} = \boxed{\sqrt{\log_3 7} + 1 \text{ punkt}}$

2. Zapisz w postaci przedziału dziedzinę funkcji f określonej podanym wzorem.

a) $f(x) = \sqrt{\log_2 \log_2 \log_3 x}, \quad D_f = [9, \infty)$

b) $f(x) = \sqrt{\log_3 \log_3 \log_2 x}, \quad D_f = [8, \infty)$

c) $f(x) = \sqrt{\log_7 \log_5 \log_2 x}, \quad D_f = [32, \infty)$

d) $f(x) = \sqrt{\log_5 \log_4 \log_3 x}, \quad D_f = [81, \infty)$

3. Dla podanej liczby k podaj taką liczbę naturalną $n > k$, że $\binom{n}{k} = \binom{n}{4k}$.

a) $k = 111, \quad n = 555$

b) $k = 5, \quad n = 25$

c) $k = 4, \quad n = 20$

d) $k = 10, \quad n = 50$

4. Podaj wzór na pochodną funkcji.

a) $\frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt[4]{5x^5 + 1}} = -\frac{25x^4}{4 \cdot (5x^5 + 1)^{5/4}}$

b) $\frac{d}{dx} \arctg(x \cdot \sqrt{x}) = \frac{3 \cdot \sqrt{x}}{2 \cdot (x^3 + 1)}$

c) $\frac{d}{dx} \ln \cos x = -\frac{\sin x}{\cos x} = \boxed{-\operatorname{tg} x + 1 \text{ punkt}}$

d) $\frac{d}{dx} \ln(e^{2x} + x^7) = \frac{2e^{2x} + 7x^6}{e^{2x} + x^7}$

5. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{\ln(1 + 6x)} = \mathbf{2/3}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(1 + 4x)} = \mathbf{1/2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1 + 2x)} = \mathbf{1/2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{16x} - 1}{\ln(1 + 8x)} = \mathbf{2}$

6. Niech x_k będzie taką liczbą, że punkt (x_k, x_k) leży na prostej stycznej w punkcie (k, k^2) do paraboli o równaniu $y = x^2$. Wówczas:

a) $x_5 = \mathbf{25/9}$

b) $x_2 = \mathbf{4/3}$

c) $x_4 = \mathbf{16/7}$

d) $x_3 = \mathbf{9/5}$

7. Podaj liczbę podzbiorów A zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ spełniających warunki $\forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (n+2) \in A)$ oraz

a) $13, 18 \in A$ **63**

b) $11, 16 \in A$ **48**

c) $10, 15 \in A$ **40**

d) $12, 17 \in A$ **54**

8. Niech g będzie funkcją odwrotną do funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem $f(x) = x^3 + 5x + 3$. Podaj wartość pochodnej.

a) $g'(45) = \mathbf{1/32}$

b) $g'(21) = \mathbf{1/17}$

c) $g'(9) = \mathbf{1/8}$

d) $g'(3) = \mathbf{1/5}$

9. Niech $f(x) = x^{100} \cdot e^{x^{33}}$. Podaj wartość pochodnej danego rzędu.

a) $f^{(760)}(0) = \mathbf{760!/20!}$

b) $f^{(463)}(0) = \mathbf{463!/11!}$

c) $f^{(430)}(0) = \mathbf{430!/10!}$

d) $f^{(199)}(0) = \mathbf{199!/3! = 199!/6}$

10. Niech

$$G(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n^2+n+2} + \frac{n+4}{n^2+n+4} + \dots + \frac{n+2k}{n^2+n+2k} + \dots + \frac{pn}{n^2+pn} \right).$$

Wówczas

- a) $G(7) = \mathbf{12}$ b) $G(5) = \mathbf{6}$ c) $G(3) = \mathbf{2}$ d) $G(9) = \mathbf{20}$

11. Podaj sumę szeregu:

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{80^n} = \mathbf{1/79}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{80^n} = \mathbf{-1/81}$
 c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3^n}}{99^n} = \mathbf{-1/98}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^4}}{99^n} = \mathbf{-1/100}$

12. Podaj sumę szeregu:

- a) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{n+48}{n}} - \sqrt{\frac{n+49}{n+1}} \right) = \mathbf{4}$
 b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{n+48}{n}} - \sqrt{\frac{n+50}{n+2}} \right) = \mathbf{10}$
 c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{n+48}{n}} - \sqrt{\frac{n+49}{n+1}} \right) = \mathbf{6}$
 d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{n+48}{n}} - \sqrt{\frac{n+51}{n+3}} \right) = \mathbf{9 + \sqrt{17}}$

13. Podaj kresy zbioru $Z(A, B) = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge A^{A^m} = B^{B^n} \right\}$.

W tym zadaniu popełniłem błąd - zaliczam odpowiedzi z tym samym błędem, co mój.

- a) $\inf Z(8, 64) = +\infty$ (błędne : **2**), $\sup Z(8, 64) = -\infty$ (błędne : **7/3**)
 b) $\inf Z(4, 16) = +\infty$ (błędne : **2**), $\sup Z(4, 16) = -\infty$ (błędne : **5/2**)
 c) $\inf Z(2, 16) = \mathbf{4}$, $\sup Z(2, 16) = \mathbf{6}$
 d) $\inf Z(2, 4) = \mathbf{2}$, $\sup Z(2, 4) = \mathbf{3}$

ANALIZA 1

EGZAMIN

6 lutego 2025 r., godz. 11:20–13:20

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadanie 13 to zadanie dodatkowe.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Z ułamków nie trzeba wyłączać części całkowitej:
np. wystarczy podać $\frac{77}{3}$, ale $25\frac{2}{3}$ też będzie uznane.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry

NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

1. Podaj kres górny zbioru.

a) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^{m^3} \leq 32^{n^3} \right\} = \sqrt[3]{5}$

b) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 8^{m^3} \leq 27^{n^3} \right\} = \sqrt[3]{\log_8 27} = \boxed{\sqrt[3]{\log_3 3} + 1 \text{ punkt}}$

c) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 9^{m^2} \leq 49^{n^2} \right\} = \sqrt{\log_9 49} = \boxed{\sqrt{\log_3 7} + 1 \text{ punkt}}$

d) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3^{m^2} \leq 81^{n^2} \right\} = 2$

2. Zapisz w postaci przedziału dziedzinę funkcji f określonej podanym wzorem.

a) $f(x) = \sqrt{\log_7 \log_5 \log_2 x}, \quad D_f = [32, \infty)$

b) $f(x) = \sqrt{\log_3 \log_3 \log_2 x}, \quad D_f = [8, \infty)$

c) $f(x) = \sqrt{\log_2 \log_2 \log_3 x}, \quad D_f = [9, \infty)$

d) $f(x) = \sqrt{\log_5 \log_4 \log_3 x}, \quad D_f = [81, \infty)$

3. Dla podanej liczby k podaj taką liczbę naturalną $n > k$, że $\binom{n}{k} = \binom{n}{4k}$.

a) $k = 4, \quad n = 20$

b) $k = 5, \quad n = 25$

c) $k = 111, \quad n = 555$

d) $k = 10, \quad n = 50$

4. Podaj wzór na pochodną funkcji.

a) $\frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt[4]{5x^5 + 1}} = -\frac{25x^4}{4 \cdot (5x^5 + 1)^{5/4}}$

b) $\frac{d}{dx} \ln \cos x = -\frac{\sin x}{\cos x} = \boxed{-\operatorname{tg} x + 1 \text{ punkt}}$

c) $\frac{d}{dx} \operatorname{arctg}(x \cdot \sqrt{x}) = \frac{3 \cdot \sqrt{x}}{2 \cdot (x^3 + 1)}$

d) $\frac{d}{dx} \ln(e^{2x} + x^7) = \frac{2e^{2x} + 7x^6}{e^{2x} + x^7}$

5. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{\ln(1 + 6x)} = \mathbf{2/3}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1 + 2x)} = \mathbf{1/2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{16x} - 1}{\ln(1 + 8x)} = \mathbf{2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(1 + 4x)} = \mathbf{1/2}$

6. Niech x_k będzie taką liczbą, że punkt (x_k, x_k) leży na prostej stycznej w punkcie (k, k^2) do paraboli o równaniu $y = x^2$. Wówczas:

a) $x_4 = \mathbf{16/7}$

b) $x_2 = \mathbf{4/3}$

c) $x_5 = \mathbf{25/9}$

d) $x_3 = \mathbf{9/5}$

7. Podaj liczbę podzbiorów A zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ spełniających warunki $\forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (n+2) \in A)$ oraz

a) $10, 15 \in A$ **40**

b) $11, 16 \in A$ **48**

c) $13, 18 \in A$ **63**

d) $12, 17 \in A$ **54**

8. Niech g będzie funkcją odwrotną do funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem $f(x) = x^3 + 5x + 3$. Podaj wartość pochodnej.

a) $g'(45) = \mathbf{1/32}$

b) $g'(9) = \mathbf{1/8}$

c) $g'(21) = \mathbf{1/17}$

d) $g'(3) = \mathbf{1/5}$

9. Niech $f(x) = x^{100} \cdot e^{x^{33}}$. Podaj wartość pochodnej danego rzędu.

a) $f^{(430)}(0) = \mathbf{430!/10!}$

b) $f^{(199)}(0) = \mathbf{199!/3! = 199!/6}$

c) $f^{(760)}(0) = \mathbf{760!/20!}$

d) $f^{(463)}(0) = \mathbf{463!/11!}$

10. Niech

$$G(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n^2+n+2} + \frac{n+4}{n^2+n+4} + \dots + \frac{n+2k}{n^2+n+2k} + \dots + \frac{pn}{n^2+pn} \right).$$

Wówczas

- a) $G(7) = \mathbf{12}$ b) $G(3) = \mathbf{2}$ c) $G(9) = \mathbf{20}$ d) $G(5) = \mathbf{6}$

11. Podaj sumę szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3^n}}{99^n} = \mathbf{-1/98}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{80^n} = \mathbf{-1/81}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{80^n} = \mathbf{1/79}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^4}}{99^n} = \mathbf{-1/100}$

12. Podaj sumę szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{n+48}{n}} - \sqrt{\frac{n+49}{n+1}} \right) = \mathbf{6}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{n+48}{n}} - \sqrt{\frac{n+50}{n+2}} \right) = \mathbf{10}$

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{n+48}{n}} - \sqrt{\frac{n+49}{n+1}} \right) = \mathbf{4}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{n+48}{n}} - \sqrt{\frac{n+51}{n+3}} \right) = \mathbf{9 + \sqrt{17}}$

13. Podaj kresy zbioru $Z(A, B) = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge A^{A^m} = B^{B^n} \right\}$.

W tym zadaniu popełniłem błąd – zaliczam odpowiedzi z tym samym błędem, co mój.

a) $\inf Z(8, 64) = +\infty$ (błędne : **2**), $\sup Z(8, 64) = -\infty$ (błędne : **7/3**)

b) $\inf Z(2, 16) = \mathbf{4}$, $\sup Z(2, 16) = \mathbf{6}$

c) $\inf Z(4, 16) = +\infty$ (błędne : **2**), $\sup Z(4, 16) = -\infty$ (błędne : **5/2**)

d) $\inf Z(2, 4) = \mathbf{2}$, $\sup Z(2, 4) = \mathbf{3}$

ANALIZA 1

EGZAMIN

6 lutego 2025 r., godz. 11:20–13:20

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadanie 13 to zadanie dodatkowe.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Z ułamków nie trzeba wyłączać części całkowitej:
np. wystarczy podać $\frac{77}{3}$, ale $25\frac{2}{3}$ też będzie uznane.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry

NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

1. Podaj kres górny zbioru.

$$\text{a) } \sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 8m^3 \leq 27n^3 \right\} = \sqrt[3]{\log_8 27} = \boxed{\sqrt[3]{\log_2 3} + 1 \text{ punkt}}$$

$$\text{b) } \sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 9m^2 \leq 49n^2 \right\} = \sqrt{\log_9 49} = \boxed{\sqrt{\log_3 7} + 1 \text{ punkt}}$$

$$\text{c) } \sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3m^2 \leq 81n^2 \right\} = 2$$

$$\text{d) } \sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2m^3 \leq 32n^3 \right\} = \sqrt[3]{5}$$

2. Zapisz w postaci przedziału dziedzinę funkcji f określonej podanym wzorem.

$$\text{a) } f(x) = \sqrt{\log_7 \log_5 \log_2 x}, \quad D_f = [32, \infty)$$

$$\text{b) } f(x) = \sqrt{\log_2 \log_2 \log_3 x}, \quad D_f = [9, \infty)$$

$$\text{c) } f(x) = \sqrt{\log_5 \log_4 \log_3 x}, \quad D_f = [81, \infty)$$

$$\text{d) } f(x) = \sqrt{\log_3 \log_3 \log_2 x}, \quad D_f = [8, \infty)$$

3. Dla podanej liczby k podaj taką liczbę naturalną $n > k$, że $\binom{n}{k} = \binom{n}{4k}$.

$$\text{a) } k = 111, \quad n = 555$$

$$\text{b) } k = 5, \quad n = 25$$

$$\text{c) } k = 10, \quad n = 50$$

$$\text{d) } k = 4, \quad n = 20$$

4. Podaj wzór na pochodną funkcji.

$$\text{a) } \frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt[4]{5x^5 + 1}} = -\frac{25x^4}{4 \cdot (5x^5 + 1)^{5/4}}$$

$$\text{b) } \frac{d}{dx} \arctg(x \cdot \sqrt{x}) = \frac{3 \cdot \sqrt{x}}{2 \cdot (x^3 + 1)}$$

$$\text{c) } \frac{d}{dx} \ln(e^{2x} + x^7) = \frac{2e^{2x} + 7x^6}{e^{2x} + x^7}$$

$$\text{d) } \frac{d}{dx} \ln \cos x = -\frac{\sin x}{\cos x} = \boxed{-\operatorname{tg} x + 1 \text{ punkt}}$$

5. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1 + 2x)} = \mathbf{1/2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{16x} - 1}{\ln(1 + 8x)} = \mathbf{2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(1 + 4x)} = \mathbf{1/2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{\ln(1 + 6x)} = \mathbf{2/3}$

6. Niech x_k będzie taką liczbą, że punkt (x_k, x_k) leży na prostej stycznej w punkcie (k, k^2) do paraboli o równaniu $y = x^2$. Wówczas:

a) $x_4 = \mathbf{16/7}$

b) $x_5 = \mathbf{25/9}$

c) $x_3 = \mathbf{9/5}$

d) $x_2 = \mathbf{4/3}$

7. Podaj liczbę podzbiorów A zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ spełniających warunki $\forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (n + 2) \in A)$ oraz

a) $13, 18 \in A$ **63**

b) $11, 16 \in A$ **48**

c) $12, 17 \in A$ **54**

d) $10, 15 \in A$ **40**

8. Niech g będzie funkcją odwrotną do funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem $f(x) = x^3 + 5x + 3$. Podaj wartość pochodnej.

a) $g'(45) = \mathbf{1/32}$

b) $g'(21) = \mathbf{1/17}$

c) $g'(3) = \mathbf{1/5}$

d) $g'(9) = \mathbf{1/8}$

9. Niech $f(x) = x^{100} \cdot e^{x^{33}}$. Podaj wartość pochodnej danego rzędu.

a) $f^{(430)}(0) = \mathbf{430!/10!}$

b) $f^{(199)}(0) = \mathbf{199!/3! = 199!/6}$

c) $f^{(463)}(0) = \mathbf{463!/11!}$

d) $f^{(760)}(0) = \mathbf{760!/20!}$

10. Niech

$$G(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n^2+n+2} + \frac{n+4}{n^2+n+4} + \dots + \frac{n+2k}{n^2+n+2k} + \dots + \frac{pn}{n^2+pn} \right).$$

Wówczas

- a) $G(3) = \mathbf{2}$ b) $G(9) = \mathbf{20}$ c) $G(5) = \mathbf{6}$ d) $G(7) = \mathbf{12}$

11. Podaj sumę szeregu:

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3^n}}{99^n} = \mathbf{-1/98}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{80^n} = \mathbf{1/79}$
 c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^4}}{99^n} = \mathbf{-1/100}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{80^n} = \mathbf{-1/81}$

12. Podaj sumę szeregu:

- a) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{n+48}{n}} - \sqrt{\frac{n+49}{n+1}} \right) = \mathbf{4}$
 b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{n+48}{n}} - \sqrt{\frac{n+50}{n+2}} \right) = \mathbf{10}$
 c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{n+48}{n}} - \sqrt{\frac{n+51}{n+3}} \right) = \mathbf{9 + \sqrt{17}}$
 d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{n+48}{n}} - \sqrt{\frac{n+49}{n+1}} \right) = \mathbf{6}$

13. Podaj kresy zbioru $Z(A, B) = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge A^{A^m} = B^{B^n} \right\}$.

W tym zadaniu popełniłem błąd – zaliczam odpowiedzi z tym samym błędem, co mój.

- a) $\inf Z(8, 64) = +\infty$ (błędne : **2**), $\sup Z(8, 64) = -\infty$ (błędne : **7/3**)
 b) $\inf Z(4, 16) = +\infty$ (błędne : **2**), $\sup Z(4, 16) = -\infty$ (błędne : **5/2**)
 c) $\inf Z(2, 4) = \mathbf{2}$, $\sup Z(2, 4) = \mathbf{3}$
 d) $\inf Z(2, 16) = \mathbf{4}$, $\sup Z(2, 16) = \mathbf{6}$

ANALIZA 1

EGZAMIN

6 lutego 2025 r., godz. 11:20–13:20

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadanie 13 to zadanie dodatkowe.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Z ułamków nie trzeba wyłączać części całkowitej:
np. wystarczy podać $\frac{77}{3}$, ale $25\frac{2}{3}$ też będzie uznane.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry

NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

1. Podaj kres górny zbioru.

a) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3^{m^2} \leq 81^{n^2} \right\} = \mathbf{2}$

b) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 8^{m^3} \leq 27^{n^3} \right\} = \sqrt[3]{\log_8 27} = \boxed{\sqrt[3]{\log_2 3} + 1 \text{ punkt}}$

c) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^{m^3} \leq 32^{n^3} \right\} = \sqrt[3]{5}$

d) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 9^{m^2} \leq 49^{n^2} \right\} = \sqrt{\log_9 49} = \boxed{\sqrt{\log_3 7} + 1 \text{ punkt}}$

2. Zapisz w postaci przedziału dziedzinę funkcji f określonej podanym wzorem.

a) $f(x) = \sqrt{\log_3 \log_3 \log_2 x}, \quad D_f = [8, \infty)$

b) $f(x) = \sqrt{\log_5 \log_4 \log_3 x}, \quad D_f = [81, \infty)$

c) $f(x) = \sqrt{\log_2 \log_2 \log_3 x}, \quad D_f = [9, \infty)$

d) $f(x) = \sqrt{\log_7 \log_5 \log_2 x}, \quad D_f = [32, \infty)$

3. Dla podanej liczby k podaj taką liczbę naturalną $n > k$, że $\binom{n}{k} = \binom{n}{4k}$.

a) $k = 10, \quad n = \mathbf{50}$

b) $k = 5, \quad n = \mathbf{25}$

c) $k = 111, \quad n = \mathbf{555}$

d) $k = 4, \quad n = \mathbf{20}$

4. Podaj wzór na pochodną funkcji.

a) $\frac{d}{dx} \ln \cos x = -\frac{\sin x}{\cos x} = \boxed{-\operatorname{tg} x + 1 \text{ punkt}}$

b) $\frac{d}{dx} \operatorname{arctg}(x \cdot \sqrt{x}) = \frac{3 \cdot \sqrt{x}}{2 \cdot (x^3 + 1)}$

c) $\frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt[4]{5x^5 + 1}} = -\frac{25x^4}{4 \cdot (5x^5 + 1)^{5/4}}$

d) $\frac{d}{dx} \ln(e^{2x} + x^7) = \frac{2e^{2x} + 7x^6}{e^{2x} + x^7}$

5. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(1 + 4x)} = \mathbf{1/2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1 + 2x)} = \mathbf{1/2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{\ln(1 + 6x)} = \mathbf{2/3}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{16x} - 1}{\ln(1 + 8x)} = \mathbf{2}$

6. Niech x_k będzie taką liczbą, że punkt (x_k, x_k) leży na prostej stycznej w punkcie (k, k^2) do paraboli o równaniu $y = x^2$. Wówczas:

a) $x_2 = \mathbf{4/3}$

b) $x_3 = \mathbf{9/5}$

c) $x_5 = \mathbf{25/9}$

d) $x_4 = \mathbf{16/7}$

7. Podaj liczbę podzbiorów A zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ spełniających warunki $\forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (n + 2) \in A)$ oraz

a) $12, 17 \in A$ **54**

b) $11, 16 \in A$ **48**

c) $13, 18 \in A$ **63**

d) $10, 15 \in A$ **40**

8. Niech g będzie funkcją odwrotną do funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem $f(x) = x^3 + 5x + 3$. Podaj wartość pochodnej.

a) $g'(9) = \mathbf{1/8}$

b) $g'(21) = \mathbf{1/17}$

c) $g'(45) = \mathbf{1/32}$

d) $g'(3) = \mathbf{1/5}$

9. Niech $f(x) = x^{100} \cdot e^{x^{33}}$. Podaj wartość pochodnej danego rzędu.

a) $f^{(463)}(0) = \mathbf{463!/11!}$

b) $f^{(760)}(0) = \mathbf{760!/20!}$

c) $f^{(199)}(0) = \mathbf{199!/3! = 199!/6}$

d) $f^{(430)}(0) = \mathbf{430!/10!}$

10. Niech

$$G(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n^2+n+2} + \frac{n+4}{n^2+n+4} + \dots + \frac{n+2k}{n^2+n+2k} + \dots + \frac{pn}{n^2+pn} \right).$$

Wówczas

- a) $G(5) = \mathbf{6}$ b) $G(3) = \mathbf{2}$ c) $G(7) = \mathbf{12}$ d) $G(9) = \mathbf{20}$

11. Podaj sumę szeregu:

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{80^n} = \mathbf{-1/81}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^4}}{99^n} = \mathbf{-1/100}$
 c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{80^n} = \mathbf{1/79}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3^n}}{99^n} = \mathbf{-1/98}$

12. Podaj sumę szeregu:

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{n+48}{n}} - \sqrt{\frac{n+51}{n+3}} \right) = \mathbf{9 + \sqrt{17}}$
 b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{n+48}{n}} - \sqrt{\frac{n+50}{n+2}} \right) = \mathbf{10}$
 c) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{n+48}{n}} - \sqrt{\frac{n+49}{n+1}} \right) = \mathbf{4}$
 d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{n+48}{n}} - \sqrt{\frac{n+49}{n+1}} \right) = \mathbf{6}$

13. Podaj kresy zbioru $Z(A, B) = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge A^{A^m} = B^{B^n} \right\}$.

W tym zadaniu popełniłem błąd – zaliczam odpowiedzi z tym samym błędem, co mój.

- a) $\inf Z(2, 16) = \mathbf{4}, \quad \sup Z(2, 16) = \mathbf{6}$
 b) $\inf Z(4, 16) = +\infty$ (błędne : **2**), $\sup Z(4, 16) = -\infty$ (błędne : **5/2**)
 c) $\inf Z(8, 64) = +\infty$ (błędne : **2**), $\sup Z(8, 64) = -\infty$ (błędne : **7/3**)
 d) $\inf Z(2, 4) = \mathbf{2}, \quad \sup Z(2, 4) = \mathbf{3}$

ANALIZA 1

EGZAMIN

6 lutego 2025 r., godz. 11:20–13:20

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadanie 13 to zadanie dodatkowe.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Z ułamków nie trzeba wyłączać części całkowitej:
np. wystarczy podać $\frac{77}{3}$, ale $25\frac{2}{3}$ też będzie uznane.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry

NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

1. Podaj kres górny zbioru.

a) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^{m^3} \leq 32^{n^3} \right\} = \sqrt[3]{5}$

b) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 8^{m^3} \leq 27^{n^3} \right\} = \sqrt[3]{\log_8 27} = \boxed{\sqrt[3]{\log_3 3} + 1 \text{ punkt}}$

c) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 9^{m^2} \leq 49^{n^2} \right\} = \sqrt{\log_9 49} = \boxed{\sqrt{\log_3 7} + 1 \text{ punkt}}$

d) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3^{m^2} \leq 81^{n^2} \right\} = 2$

2. Zapisz w postaci przedziału dziedzinę funkcji f określonej podanym wzorem.

a) $f(x) = \sqrt{\log_2 \log_2 \log_3 x}, \quad D_f = [9, \infty)$

b) $f(x) = \sqrt{\log_7 \log_5 \log_2 x}, \quad D_f = [32, \infty)$

c) $f(x) = \sqrt{\log_3 \log_3 \log_2 x}, \quad D_f = [8, \infty)$

d) $f(x) = \sqrt{\log_5 \log_4 \log_3 x}, \quad D_f = [81, \infty)$

3. Dla podanej liczby k podaj taką liczbę naturalną $n > k$, że $\binom{n}{k} = \binom{n}{4k}$.

a) $k = 10, \quad n = 50$

b) $k = 4, \quad n = 20$

c) $k = 5, \quad n = 25$

d) $k = 111, \quad n = 555$

4. Podaj wzór na pochodną funkcji.

a) $\frac{d}{dx} \arctg(x \cdot \sqrt{x}) = \frac{3 \cdot \sqrt{x}}{2 \cdot (x^3 + 1)}$

b) $\frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt[4]{5x^5 + 1}} = -\frac{25x^4}{4 \cdot (5x^5 + 1)^{5/4}}$

c) $\frac{d}{dx} \ln \cos x = -\frac{\sin x}{\cos x} = \boxed{-\operatorname{tg} x + 1 \text{ punkt}}$

d) $\frac{d}{dx} \ln(e^{2x} + x^7) = \frac{2e^{2x} + 7x^6}{e^{2x} + x^7}$

5. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{\ln(1 + 6x)} = \mathbf{2/3}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1 + 2x)} = \mathbf{1/2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{16x} - 1}{\ln(1 + 8x)} = \mathbf{2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(1 + 4x)} = \mathbf{1/2}$

6. Niech x_k będzie taką liczbą, że punkt (x_k, x_k) leży na prostej stycznej w punkcie (k, k^2) do paraboli o równaniu $y = x^2$. Wówczas:

a) $x_5 = \mathbf{25/9}$

b) $x_4 = \mathbf{16/7}$

c) $x_2 = \mathbf{4/3}$

d) $x_3 = \mathbf{9/5}$

7. Podaj liczbę podzbiorów A zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ spełniających warunki $\forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (n+2) \in A)$ oraz

a) $12, 17 \in A$ **54**

b) $10, 15 \in A$ **40**

c) $11, 16 \in A$ **48**

d) $13, 18 \in A$ **63**

8. Niech g będzie funkcją odwrotną do funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem $f(x) = x^3 + 5x + 3$. Podaj wartość pochodnej.

a) $g'(21) = \mathbf{1/17}$

b) $g'(45) = \mathbf{1/32}$

c) $g'(9) = \mathbf{1/8}$

d) $g'(3) = \mathbf{1/5}$

9. Niech $f(x) = x^{100} \cdot e^{x^{33}}$. Podaj wartość pochodnej danego rzędu.

a) $f^{(430)}(0) = \mathbf{430!/10!}$

b) $f^{(463)}(0) = \mathbf{463!/11!}$

c) $f^{(760)}(0) = \mathbf{760!/20!}$

d) $f^{(199)}(0) = \mathbf{199!/3! = 199!/6}$

10. Niech

$$G(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n^2+n+2} + \frac{n+4}{n^2+n+4} + \dots + \frac{n+2k}{n^2+n+2k} + \dots + \frac{pn}{n^2+pn} \right).$$

Wówczas

- a) $G(7) = \mathbf{12}$ b) $G(3) = \mathbf{2}$ c) $G(9) = \mathbf{20}$ d) $G(5) = \mathbf{6}$

11. Podaj sumę szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{80^n} = \mathbf{1/79}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3^n}}{99^n} = \mathbf{-1/98}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{80^n} = \mathbf{-1/81}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^4}}{99^n} = \mathbf{-1/100}$

12. Podaj sumę szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{n+48}{n}} - \sqrt{\frac{n+51}{n+3}} \right) = \mathbf{9 + \sqrt{17}}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{n+48}{n}} - \sqrt{\frac{n+49}{n+1}} \right) = \mathbf{6}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{n+48}{n}} - \sqrt{\frac{n+50}{n+2}} \right) = \mathbf{10}$

d) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{n+48}{n}} - \sqrt{\frac{n+49}{n+1}} \right) = \mathbf{4}$

13. Podaj kresy zbioru $Z(A, B) = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge A^{A^m} = B^{B^n} \right\}$.

W tym zadaniu popełniłem błąd – zaliczam odpowiedzi z tym samym błędem, co mój.

a) $\inf Z(4, 16) = +\infty$ (błędne : **2**), $\sup Z(4, 16) = -\infty$ (błędne : **5/2**)

b) $\inf Z(8, 64) = +\infty$ (błędne : **2**), $\sup Z(8, 64) = -\infty$ (błędne : **7/3**)

c) $\inf Z(2, 16) = \mathbf{4}$, $\sup Z(2, 16) = \mathbf{6}$

d) $\inf Z(2, 4) = \mathbf{2}$, $\sup Z(2, 4) = \mathbf{3}$