

ANALIZA 1

EGZAMIN

6 lutego 2025 r., godz. 11:20–13:20

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadanie 13 to zadanie dodatkowe.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Z ułamków nie trzeba wyłączać części całkowitej:
np. wystarczy podać $\frac{77}{3}$, ale $25\frac{2}{3}$ też będzie uznane.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry

NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

1. Podaj kres górny zbioru.

a) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 8m^3 \leq 27n^3 \right\} = \dots\dots\dots$

b) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3m^2 \leq 81n^2 \right\} = \dots\dots\dots$

c) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2m^3 \leq 32n^3 \right\} = \dots\dots\dots$

d) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 9m^2 \leq 49n^2 \right\} = \dots\dots\dots$

2. Zapisz w postaci przedziału dziedzinę funkcji f określonej podanym wzorem.

a) $f(x) = \sqrt{\log_7 \log_5 \log_2 x}$, $D_f = \dots\dots\dots$

b) $f(x) = \sqrt{\log_5 \log_4 \log_3 x}$, $D_f = \dots\dots\dots$

c) $f(x) = \sqrt{\log_3 \log_3 \log_2 x}$, $D_f = \dots\dots\dots$

d) $f(x) = \sqrt{\log_2 \log_2 \log_3 x}$, $D_f = \dots\dots\dots$

3. Dla podanej liczby k podaj taką liczbę naturalną $n > k$, że $\binom{n}{k} = \binom{n}{4k}$.

a) $k = 5$, $n = \dots\dots\dots$ b) $k = 4$, $n = \dots\dots\dots$

c) $k = 111$, $n = \dots\dots\dots$ d) $k = 10$, $n = \dots\dots\dots$

4. Podaj wzór na pochodną funkcji.

a) $\frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt[4]{5x^5 + 1}} = \dots\dots\dots$

b) $\frac{d}{dx} \ln(e^{2x} + x^7) = \dots\dots\dots$

c) $\frac{d}{dx} \ln \cos x = \dots\dots\dots$

d) $\frac{d}{dx} \arctg(x \cdot \sqrt{x}) = \dots\dots\dots$

5. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1 + 2x)} = \dots\dots\dots$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(1 + 4x)} = \dots\dots\dots$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{\ln(1 + 6x)} = \dots\dots\dots$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{16x} - 1}{\ln(1 + 8x)} = \dots\dots\dots$

6. Niech x_k będzie taką liczbą, że punkt (x_k, x_k) leży na prostej stycznej w punkcie (k, k^2) do paraboli o równaniu $y = x^2$. Wówczas:

a) $x_4 = \dots\dots\dots$

b) $x_3 = \dots\dots\dots$

c) $x_2 = \dots\dots\dots$

d) $x_5 = \dots\dots\dots$

7. Podaj liczbę podzbiorów A zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ spełniających warunki $\forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (n + 2) \in A)$ oraz

a) $11, 16 \in A \dots\dots\dots$

b) $10, 15 \in A \dots\dots\dots$

c) $13, 18 \in A \dots\dots\dots$

d) $12, 17 \in A \dots\dots\dots$

8. Niech g będzie funkcją odwrotną do funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem $f(x) = x^3 + 5x + 3$. Podaj wartość pochodnej.

a) $g'(45) = \dots\dots\dots$

b) $g'(3) = \dots\dots\dots$

c) $g'(9) = \dots\dots\dots$

d) $g'(21) = \dots\dots\dots$

9. Niech $f(x) = x^{100} \cdot e^{x^{33}}$. Podaj wartość pochodnej danego rzędu.

a) $f^{(199)}(0) = \dots\dots\dots$

b) $f^{(463)}(0) = \dots\dots\dots$

c) $f^{(430)}(0) = \dots\dots\dots$

d) $f^{(760)}(0) = \dots\dots\dots$

10. Niech

$$G(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n^2+n+2} + \frac{n+4}{n^2+n+4} + \dots + \frac{n+2k}{n^2+n+2k} + \dots + \frac{pn}{n^2+pn} \right).$$

Wówczas

a) $G(3) = \dots$ b) $G(5) = \dots$ c) $G(7) = \dots$ d) $G(9) = \dots$

11. Podaj sumę szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3^n}}{99^n} = \dots$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^4}}{99^n} = \dots$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{80^n} = \dots$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{80^n} = \dots$

12. Podaj sumę szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{n+48}{n}} - \sqrt{\frac{n+50}{n+2}} \right) = \dots$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{n+48}{n}} - \sqrt{\frac{n+49}{n+1}} \right) = \dots$

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{n+48}{n}} - \sqrt{\frac{n+49}{n+1}} \right) = \dots$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{n+48}{n}} - \sqrt{\frac{n+51}{n+3}} \right) = \dots$

13. Podaj kresy zbioru $Z(A, B) = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge A^{A^m} = B^{B^n} \right\}$.

a) $\inf Z(8, 64) = \dots$, $\sup Z(8, 64) = \dots$

b) $\inf Z(2, 4) = \dots$, $\sup Z(2, 4) = \dots$

c) $\inf Z(2, 16) = \dots$, $\sup Z(2, 16) = \dots$

d) $\inf Z(4, 16) = \dots$, $\sup Z(4, 16) = \dots$