

Egzamin, 17.02.2025, godz. 9:00–11:00**Zadanie 1 (10 punktów)**

Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$2^{1025} \cdot n \leq 2^n + 2^{1035}.$$

Rozwiązanie:

Dowód nierówności podzielimy na dwa przypadki.

Przypadek pierwszy: $n \leq 1024$.

Dla $n \leq 1024$ zachodzą nierówności

$$2^{1025} \cdot n \leq 2^{1025} \cdot 1024 = 2^{1025} \cdot 2^{10} = 2^{1035} < 2^n + 2^{1035},$$

skąd wynika prawdziwość nierówności danej w zadaniu.

Przypadek drugi: $n \geq 1025$.

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 1025$ porównujemy lewą i prawą stronę nierówności danej w treści zadania:

$$\begin{aligned} L &= 2^{1025} \cdot 1025, \\ P &= 2^{1025} + 2^{1035} = 2^{1025} + 2^{10} \cdot 2^{1025} = 2^{1025} + 1024 \cdot 2^{1025} = 1025 \cdot 2^{1025}, \end{aligned}$$

skąd $L = P$.

2° Niech $n \geq 1025$ będzie taką liczbą naturalną, że

$$2^{1025} \cdot n \leq 2^n + 2^{1035}.$$

W celu przeprowadzenia zasadniczej części dowodu indukcyjnego chcemy wykazać, że z powyższej nierówności wynika nierówność

$$2^{1025} \cdot (n+1) \leq 2^{n+1} + 2^{1035}.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności i korzystając z założenia indukcyjnego oraz z nierówności $n \geq 1025$ otrzymujemy

$$L = 2^{1025} \cdot (n+1) = 2^{1025} \cdot n + 2^{1025} \leq 2^n + 2^{1035} + 2^{1025} \leq 2^n + 2^{1035} + 2^n = 2^{n+1} + 2^{1035} = P,$$

co kończy dowód indukcyjny.

Zadanie **2** (10 punktów)

Wyznacz punkt, w którym funkcja f zdefiniowana wzorem

$$f(x) = \frac{x}{40} - \frac{9 \cdot \ln(4x^2 + 1)}{80} + \operatorname{arctg}(2x)$$

osiąga największą wartość na przedziale $[4, 5]$.

Rozwiązanie:

Różniczkujemy funkcję f i korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{40} - \frac{9 \cdot 8x}{80 \cdot (4x^2 + 1)} + \frac{2}{4x^2 + 1} = \frac{4x^2 + 1}{40 \cdot (4x^2 + 1)} - \frac{36x}{40 \cdot (4x^2 + 1)} + \frac{80}{40 \cdot (4x^2 + 1)} = \\ &= \frac{4x^2 - 36x + 81}{40 \cdot (4x^2 + 1)} = \frac{(2x - 9)^2}{40 \cdot (4x^2 + 1)} \geq 0, \end{aligned}$$

przy czym w ostatniej nierówności równość zachodzi tylko dla $x = 9/2 = 4,5$. Ponieważ w interesującym nas przedziale pochodna funkcji f jest dodatnia za wyjątkiem jednego punktu, w którym ma wartość zero, funkcja f jest w tym przedziale rosnąca.

Odpowiedź: Funkcja f osiąga wartość największą na końcu przedziału, czyli w punkcie 5.

Zadanie **3** (10 punktów)

Udowodnij, że liczba $\log_{490} 70$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_{490} 70$ jest wymierna i niech będzie ona równa m/n , gdzie m, n są liczbami naturalnymi (**zauważmy, że jest to liczba dodatnia, bo podstawa logarytmu i liczba logarytmowana są większe od 1**). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned}\log_{490} 70 &= \frac{m}{n}, \\ 490^{m/n} &= 70, \\ 490^m &= 70^n.\end{aligned}$$

Wykażemy, że powyższe równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych m, n .

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy

$$2^m \cdot 5^m \cdot 7^{2m} = 2^n \cdot 5^n \cdot 7^n.$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} m &= n \\ m &= n \\ 2m &= n \end{cases}$$

Jednak powyższy układ równań nie ma rozwiązania w liczbach dodatnich m, n , gdyż dla każdego rozwiązania w liczbach rzeczywistych m, n mamy

$$m = n = 2m,$$

skąd $m = 0$.

Doszliliśmy do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{490} 70$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{490} 70$ jest niewymierna.

Uwaga:

Ponieważ korzystamy z jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze liczb naturalnych, **błędne** jest każde rozwiązanie oparte na rozkładzie, w którym:

- zamiast rozkładu na czynniki pierwsze występuje rozkład z potęgami liczb złożonych, lub
- występują wykładniki, o których nie wiadomo, że są całkowite i nieujemne.

W takim przypadku punktacja będzie bardzo mocno obniżona.

Zadanie **4** (10 punktów)

Wyznacz (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{\sqrt{n^2+12n+35}-n:n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Rozwiązanie:

Przekształcając wyrażenie definiujące dany w zadaniu zbiór otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+12n+35}-n &= \sqrt{n^2+12n+35}-(n+6)+6 = \frac{n^2+12n+35-(n+6)^2}{\sqrt{n^2+12n+35}+(n+6)}+6 = \\ &= \frac{n^2+12n+35-n^2-12n-36}{\sqrt{n^2+12n+35}+(n+6)}+6 = -\frac{1}{\sqrt{n^2+12n+35}+(n+6)}+6.\end{aligned}$$

Z otrzymanej postaci wynika, że podane wyrażenie rośnie wraz z n , a przy $n\rightarrow\infty$ dąży do 6.

Dla zakończenia rozwiązania wystarczy odnotować, że w ciągu rosnącym pierwszy wyraz (tutaj równy $\sqrt{48}-1$) jest najmniejszy, a kresem górnym zbioru wyrazów jest granica ciągu.

Odpowiedź: Kres dolny danego zbioru jest równy $\sqrt{48}-1=4\sqrt{3}-1$, a kres górny 6.

Zadanie **5** (10 punktów)

Niech funkcja $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x) = 9 \ln x - \sqrt[10]{x}.$$

Rozstrzygnij, która z liczb jest większa:

$$f\left(10^{20}-2\right)+f\left(10^{20}\right) \quad \text { czy } \quad 2 \cdot f\left(10^{20}-1\right) ?$$

Powyższe liczby $\approx 628,93063347785644624649692368637111473639653590635827137199804$ różnią się na 60-tym miejscu po przecinku.

Rozwiązanie:

Różniczkując dwukrotnie funkcję f otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{9}{x}-\frac{1}{10 \cdot x^{9 / 10}}$$

oraz

$$f''(x)=-\frac{9}{x^2}+\frac{9}{100 \cdot x^{19 / 10}},$$

skąd nierówność $f''(x)<0$ jest równoważna¹ kolejnym nierównościom

$$\begin{aligned}-\frac{9}{x^2}+\frac{9}{100 \cdot x^{19 / 10}} &< 0, \\ \frac{9}{100 \cdot x^{19 / 10}} &< \frac{9}{x^2}, \\ x^{1 / 10} &< 100, \\ x &< 10^{20}.\end{aligned}$$

Zatem f jest ściśle wklęsła w przedziale $(0, 10^{20}]$, skąd

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}<f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

czyli

$$f(x)+f(y)<2 \cdot f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych dodatnich $x, y \leqslant 10^{20}$.

W szczególności

$$f\left(10^{20}-2\right)+f\left(10^{20}\right)<2 \cdot f\left(10^{20}-1\right).$$

Zadanie **6** (10 punktów)

Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\sqrt[666]{x^{666}+666}.$$

Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych x,y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|.$$

Rozwiązanie:

Dla $x=y$ dowiedzona nierówność jest oczywista, natomiast przy $x\neq y$ z twierdzenia Lagrange’a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x)-f(y)|=|f'(c)|\cdot|x-y|,$$

gdzie c jest pewną liczbą leżącą między x i y .

Rozwiązanie zadania będzie zakończone, jeśli wykażemy, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność

$$|f'(x)|\leqslant 1,$$

czyli

$$\left|\frac{666\cdot x^{665}}{666\cdot (x^{666}+666)^{665/666}}\right|=\left|\frac{x^{665}}{(x^{666}+666)^{665/666}}\right|\leqslant 1.$$

(♠)

Nierówność (♠) dowodzimy przez bezpośrednie szacowanie:

$$\frac{|x|^{665}}{(x^{666}+666)^{665/666}}=\frac{(x^{666})^{665/666}}{(x^{666}+666)^{665/666}}<\frac{(x^{666}+666)^{665/666}}{(x^{666}+666)^{665/666}}=1.$$