

Zadanie 1 (10 punktów)

Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$2^{1025} \cdot n \leq 2^n + 2^{1035}.$$

Zadanie 2 (10 punktów)

Wyznacz punkt, w którym funkcja f zdefiniowana wzorem

$$f(x) = \frac{x}{40} - \frac{9 \cdot \ln(4x^2 + 1)}{80} + \operatorname{arctg}(2x)$$

osiąga największą wartość na przedziale $[4, 5]$.

Zadanie 3 (10 punktów)

Udowodnij, że liczba $\log_{490} 70$ jest niewymierna.

Zadanie 4 (10 punktów)

Wyznacz (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{ \sqrt{n^2 + 12n + 35} - n : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Zadanie 5 (10 punktów)

Niech funkcja $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x) = 9 \ln x - \sqrt[10]{x}.$$

Rozstrzygnij, która z liczb jest większa:

$$f(10^{20} - 2) + f(10^{20}) \quad \text{czy} \quad 2 \cdot f(10^{20} - 1) ?$$

Powyższe liczby $\approx 628,93063347785644624649692368637111473639653590635827137199804$ różnią się na 60-tym miejscu po przecinku.

Zadanie 6 (10 punktów)

Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \sqrt[666]{x^{666} + 666}.$$

Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$