

ANALIZA 1

EGZAMIN

17 lutego 2025 r., godz. 11:20–13:20

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadania 13 i 14 to zadania dodatkowe.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Z ułamków nie trzeba wyłączać części całkowitej:
np. wystarczy podać $\frac{77}{3}$, ale $25\frac{2}{3}$ też będzie uznane.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry

NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

1. Podaj kres górny zbioru.

Przypomnienie: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

a) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^{m^4} \leq 16^{n^4} \right\} = \sqrt[4]{4} = \boxed{\sqrt{2} + 1 \text{ punkt}}$

b) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 32^{m^3} \leq 128^{n^3} \right\} = \sqrt[3]{7/5}$

c) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 25^{m^2} \leq 64^{n^2} \right\} = \sqrt{\log_{25} 64} = \boxed{\sqrt{\log_5 8} + 1 \text{ punkt}}$

d) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 27^{m^3} \leq 64^{n^3} \right\} = \sqrt[3]{\log_{27} 64} = \boxed{\sqrt[3]{\log_3 4} + 1 \text{ punkt}}$

2. Zapisz w postaci sumy przedziałów dziedzinę funkcji f określonej podanym wzorem.

a) $f(x) = \sqrt{\log_{19} \log_7 |\log_2 x|}$, $D_f = (0, 1/128] \cup [128, \infty)$

b) $f(x) = \sqrt{\log_{17} \log_2 |\log_5 x|}$, $D_f = (0, 1/25] \cup [25, \infty)$

c) $f(x) = \sqrt{\log_{13} \log_2 |\log_7 x|}$, $D_f = (0, 1/49] \cup [49, \infty)$

d) $f(x) = \sqrt{\log_{11} \log_6 |\log_2 x|}$, $D_f = (0, 1/64] \cup [64, \infty)$

3. Dla podanej liczby k podaj taką liczbę naturalną $n > k$, że $\binom{n}{k} = \binom{n}{k^3}$.

a) $k = 3$, $n = \mathbf{30}$

b) $k = 2$, $n = \mathbf{10}$

c) $k = 5$, $n = \mathbf{130}$

d) $k = 4$, $n = \mathbf{68}$

4. Dla podanej funkcji f podaj wartość parametru a , dla której funkcja f jest ciągła.

Przypomnienie: $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x .

a) $f(x) = a \cdot \{x\} - \sin\left(\frac{\pi \cdot \{x\}}{6}\right)$, $a = \mathbf{1/2}$

b) $f(x) = a \cdot \{x\} - \sin\left(\frac{\pi \cdot \{x\}}{2}\right)$, $a = \mathbf{1}$

c) $f(x) = a \cdot \{x\} - \sin\left(\frac{\pi \cdot \{x\}}{3}\right)$, $a = \mathbf{\sqrt{3}/2}$

d) $f(x) = a \cdot \{x\} - \sin\left(\frac{\pi \cdot \{x\}}{4}\right)$, $a = \mathbf{\sqrt{2}/2}$

5. Niech $f(x) = x \cdot \sqrt{x}$. Podaj wzór na pochodną danego rzędu.

a) $f'(x) = \frac{3 \cdot \sqrt{x}}{2}$

b) $f''(x) = \frac{3}{4 \cdot \sqrt{x}}$

c) $f'''(x) = -\frac{3}{8 \cdot x^{3/2}}$

d) $f^{(4)}(x) = \frac{9}{16 \cdot x^{5/2}}$

6. Niech $f(x) = x \cdot \sqrt[3]{x}$. Podaj wzór na pochodną danego rzędu.

a) $f'(x) = \frac{4 \cdot \sqrt[3]{x}}{3}$

b) $f''(x) = \frac{4}{9 \cdot x^{2/3}}$

c) $f'''(x) = -\frac{8}{27 \cdot x^{5/3}}$

d) $f^{(4)}(x) = \frac{40}{81 \cdot x^{8/3}}$

7. Niech x_k będzie taką liczbą, że punkt (x_k, x_k) leży na prostej stycznej w punkcie (k, k^3) do krzywej o równaniu $y = x^3$. Wówczas:

a) $x_3 = 27/13$ b) $x_2 = 16/11$ c) $x_{10} = 2000/299$ d) $x_4 = 128/47$

8. Niech g będzie funkcją odwrotną do funkcji $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem $f(x) = \sqrt{x} + 1$. Podaj wartość pochodnej.

a) $g'(101) = 200$ b) $g'(5) = 8$ c) $g'(10) = 18$ d) $g'(65) = 128$

9. Niech

$$G(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+p}{n^2+n+p} + \frac{n+2p}{n^2+n+2p} + \dots + \frac{n+kp}{n^2+n+kp} + \dots + \frac{7n}{n^2+7n} \right).$$

Wówczas

a) $G(1) = 24$ b) $G(3) = 8$ c) $G(2) = 12$ d) $G(6) = 4$

10. Niech $f(x) = x^{333} \cdot e^{x^{100}}$. Podaj wartość pochodnej danego rzędu.

a) $f^{(4333)}(0) = 4333!/40!$

b) $f^{(3333)}(0) = 3333!/30!$

c) $f^{(1333)}(0) = 1333!/10!$

d) $f^{(2333)}(0) = 2333!/20!$

11. Podaj sumę szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^{26}}}{26^n} = -1/27$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{26^n}}{26^n} = 1/25$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^{25}}}{26^n} = -1/27$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{25^n}}{26^n} = -1/25$

12. Podaj sumę szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \right) = 2 - e$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \right) = 4 - e$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+2} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+3} \right) = 8 - e$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+3} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+4} \right) = 16 - e$

13. Podaj kresy zbioru $Z(A, B) = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^{A^m} = 4^{B^n} \right\}$.

a) $\inf Z(8, 16) = 4/3, \quad \sup Z(8, 16) = 3/2$

b) $\inf Z(16, 32) = 5/4, \quad \sup Z(16, 32) = 4/3$

c) $\inf Z(32, 64) = 6/5, \quad \sup Z(32, 64) = 5/4$

d) $\inf Z(64, 128) = 7/6, \quad \sup Z(64, 128) = 6/5$

14. To samo, co w poprzednim zadaniu.

a) $\inf Z(8, 128) = 7/3, \quad \sup Z(8, 128) = 5/2$

b) $\inf Z(32, 128) = 7/5, \quad \sup Z(32, 128) = 3/2$

c) $\inf Z(128, 16) = 4/7, \quad \sup Z(128, 16) = 3/5$

d) $\inf Z(128, 32) = 5/7, \quad \sup Z(128, 32) = 3/4$