

ANALIZA 1

3 lutego 2025 r., godz. 11:15–12:45

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Z ułamków nie trzeba wyłączać części całkowitej:
np. wystarczy podać $\frac{77}{3}$, ale $25\frac{2}{3}$ też będzie uznane.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry

NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

1. Dla podanej liczby n podaj takie $x > 1$, że $\log_x(n-x) = -1$.

a) $n = 10, \quad x = 5 + \sqrt{24} = 5 + 2\sqrt{6}$ b) $n = 14, \quad x = 7 + \sqrt{48} = 7 + 4\sqrt{3}$

c) $n = 16, \quad x = 8 + \sqrt{63} = 8 + 3\sqrt{7}$ d) $n = 18, \quad x = 9 + \sqrt{80} = 9 + 4\sqrt{5}$

2. Podaj kres górny zbioru. Przypomnienie: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

a) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 25m^2 \leq 50n^2 \right\} = \sqrt{2}$

b) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 25m^2 \leq 49n^2 \right\} = 7/5$

c) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16m^2 \leq 48n^2 \right\} = \sqrt{3}$

d) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16m^2 \leq 49n^2 \right\} = 7/4$

3. Podaj kres górny zbioru. Przypomnienie: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

a) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 81^m \leq 27^n \right\} = 3/4$

b) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 8^m \leq 32^n \right\} = 5/3$

c) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 125^m \leq 27^n \right\} = \log_{125} 27 = \boxed{\log_5 3} \text{ +1 punkt}$

d) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16^m \leq 81^n \right\} = \log_{16} 81 = \boxed{\log_2 3} \text{ +1 punkt}$

4. Niech

$$G(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{n^2+3n+1} + \frac{3n+2}{n^2+3n+2} + \dots + \frac{3n+k}{n^2+3n+k} + \dots + \frac{pn}{n^2+pn} \right).$$

Wówczas

a) $G(5) = \mathbf{8}$

b) $G(7) = \mathbf{20}$

c) $G(9) = \mathbf{36}$

d) $G(10) = \mathbf{91/2}$

5. Podaj wzór na pochodną funkcji.

a) $\frac{d}{dx} \arctg(x^{22}) = \frac{\mathbf{22x^{21}}}{\mathbf{x^{44}+1}}$

b) $\frac{d}{dx} \arctg(x^5) = \frac{\mathbf{5x^4}}{\mathbf{x^{10}+1}}$

c) $\frac{d}{dx} \ln(x^6+36) = \frac{\mathbf{6x^5}}{\mathbf{x^6+36}}$

d) $\frac{d}{dx} \ln(x^9+x^8+10) = \frac{\mathbf{9x^8+8x^7}}{\mathbf{x^9+x^8+10}}$

6. Podaj wzór na pochodną funkcji.

a) $\frac{d}{dx} \frac{1}{(x^5+1)^3} = -\frac{\mathbf{15x^4}}{(\mathbf{x^5+1})^4}$

b) $\frac{d}{dx} \frac{1}{x^3+1} = -\frac{\mathbf{3x^2}}{(\mathbf{x^3+1})^2}$

c) $\frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt[3]{4x^5+1}} = -\frac{\mathbf{20x^4}}{\mathbf{3 \cdot (4x^5+1)^{4/3}}}$

d) $\frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{3x^5+1}} = -\frac{\mathbf{15x^4}}{\mathbf{2 \cdot (3x^5+1)^{3/2}}}$

7. Podaj wzór na pochodną funkcji.

a) $\frac{d}{dx} \sqrt{7x+3} = \frac{7}{2 \cdot \sqrt{7x+3}}$

b) $\frac{d}{dx} \sqrt{x^5+7} = \frac{5x^4}{2 \cdot \sqrt{x^5+7}}$

c) $\frac{d}{dx} \sqrt[4]{7x+3} = \frac{7}{4 \cdot (7x+3)^{3/4}}$

d) $\frac{d}{dx} \sqrt[5]{x^4+7} = \frac{4x^3}{5 \cdot (x^4+7)^{4/5}}$

8. Podaj wzór na pochodną drugiego rzędu.

a) $\frac{d^2}{dx^2} \sqrt[5]{x} = -\frac{4}{25x^{9/5}}$

b) $\frac{d^2}{dx^2} \sqrt[4]{x} = -\frac{3}{16x^{7/4}}$

c) $\frac{d^2}{dx^2} \sqrt[3]{x} = -\frac{2}{9x^{5/3}}$

d) $\frac{d^2}{dx^2} \sqrt{x} = -\frac{1}{4x^{3/2}}$

9. Niech x_k będzie taką liczbą, że punkt $(x_k, 0)$ leży na prostej stycznej w punkcie (k, k^2) do paraboli o równaniu $y = x^2$. Wówczas:

a) $x_4 = 2$

b) $x_1 = 1/2$

c) $x_{10} = 5$

d) $x_5 = 5/2$

10. Niech g będzie funkcją odwrotną do funkcji $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem $f(x) = x^2 + 2x$. Podaj wartość pochodnej.

a) $g'(99) = 1/20$

b) $g'(15) = 1/8$

c) $g'(24) = 1/10$

d) $g'(80) = 1/18$