

ANALIZA 1

3 lutego 2025 r., godz. 11:15–12:45

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Z ułamków nie trzeba wyłączać części całkowitej:
np. wystarczy podać $\frac{77}{3}$, ale $25\frac{2}{3}$ też będzie uznane.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry

NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

1. Dla podanej liczby n podaj takie $x > 1$, że $\log_x(n-x) = -1$.

a) $n = 10$, $x = \dots\dots\dots$

b) $n = 14$, $x = \dots\dots\dots$

c) $n = 16$, $x = \dots\dots\dots$

d) $n = 18$, $x = \dots\dots\dots$

2. Podaj kres górny zbioru. Przypomnienie: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

a) $\sup\left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 25m^2 \leq 50n^2\right\} = \dots\dots\dots$

b) $\sup\left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 25m^2 \leq 49n^2\right\} = \dots\dots\dots$

c) $\sup\left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16m^2 \leq 48n^2\right\} = \dots\dots\dots$

d) $\sup\left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16m^2 \leq 49n^2\right\} = \dots\dots\dots$

3. Podaj kres górny zbioru. Przypomnienie: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

a) $\sup\left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 81^m \leq 27^n\right\} = \dots\dots\dots$

b) $\sup\left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 8^m \leq 32^n\right\} = \dots\dots\dots$

c) $\sup\left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 125^m \leq 27^n\right\} = \dots\dots\dots$

d) $\sup\left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16^m \leq 81^n\right\} = \dots\dots\dots$

4. Niech

$$G(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{n^2+3n+1} + \frac{3n+2}{n^2+3n+2} + \dots + \frac{3n+k}{n^2+3n+k} + \dots + \frac{pn}{n^2+pn} \right).$$

Wówczas

a) $G(5) = \dots\dots\dots$

b) $G(7) = \dots\dots\dots$

c) $G(9) = \dots\dots\dots$

d) $G(10) = \dots\dots\dots$

5. Podaj wzór na pochodną funkcji.

a) $\frac{d}{dx} \arctg(x^{22}) = \dots\dots\dots$

b) $\frac{d}{dx} \arctg(x^5) = \dots\dots\dots$

c) $\frac{d}{dx} \ln(x^6 + 36) = \dots\dots\dots$

d) $\frac{d}{dx} \ln(x^9 + x^8 + 10) = \dots\dots\dots$

6. Podaj wzór na pochodną funkcji.

a) $\frac{d}{dx} \frac{1}{(x^5+1)^3} = \dots\dots\dots$

b) $\frac{d}{dx} \frac{1}{x^3+1} = \dots\dots\dots$

c) $\frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt[3]{4x^5+1}} = \dots\dots\dots$

d) $\frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{3x^5+1}} = \dots\dots\dots$

7. Podaj wzór na pochodną funkcji.

a) $\frac{d}{dx}\sqrt{7x+3} = \dots\dots\dots$

b) $\frac{d}{dx}\sqrt{x^5+7} = \dots\dots\dots$

c) $\frac{d}{dx}\sqrt[4]{7x+3} = \dots\dots\dots$

d) $\frac{d}{dx}\sqrt[5]{x^4+7} = \dots\dots\dots$

8. Podaj wzór na pochodną drugiego rzędu.

a) $\frac{d^2}{dx^2}\sqrt[5]{x} = \dots\dots\dots$

b) $\frac{d^2}{dx^2}\sqrt[4]{x} = \dots\dots\dots$

c) $\frac{d^2}{dx^2}\sqrt[3]{x} = \dots\dots\dots$

d) $\frac{d^2}{dx^2}\sqrt{x} = \dots\dots\dots$

9. Niech x_k będzie taką liczbą, że punkt $(x_k, 0)$ leży na prostej stycznej w punkcie (k, k^2) do paraboli o równaniu $y = x^2$. Wówczas:

a) $x_4 = \dots\dots\dots$

b) $x_1 = \dots\dots\dots$

c) $x_{10} = \dots\dots\dots$

d) $x_5 = \dots\dots\dots$

10. Niech g będzie funkcją odwrotną do funkcji $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem $f(x) = x^2 + 2x$. Podaj wartość pochodnej.

a) $g'(99) = \dots\dots\dots$

b) $g'(15) = \dots\dots\dots$

c) $g'(24) = \dots\dots\dots$

d) $g'(80) = \dots\dots\dots$