

KOŁOKWIUM nr 9, 3.02.2025, godz. 11:15–12:45

Zadanie 18.
Oblicz sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 25}.$$

Rozwiązanie:

Szukamy takich liczb A i B , że

$$\frac{1}{4n^2 - 25} = \frac{1}{(2n - 5)(2n + 5)} = \frac{A}{2n - 5} + \frac{B}{2n + 5}.$$

Po wymnożeniu prawej równości stronami przez $(2n - 5)(2n + 5)$ otrzymujemy

$$1 = A(2n + 5) + B(2n - 5). \tag{*}$$

Dla $n = 5/2$ otrzymujemy $A = 1/10$, natomiast przyjęcie $n = -5/2$ daje $B = -1/10$.

Inny sposób: porównując w równaniu (*) współczynniki przy n oraz wyrazy wolne dostajemy układ równań i go rozwiązujemy.

Zatem N -ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem

$$S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{4n^2 - 25} = \frac{1}{10} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{2n - 5} - \frac{1}{2n + 5} \right) =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{10} \left(\left(\frac{1}{-3} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{-1} - \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{11} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{13} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{15} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{17} \right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{19} \right) + \dots \right. \\ &\quad \dots + \left(\frac{1}{2N - 15} - \frac{1}{2N - 5} \right) + \left(\frac{1}{2N - 13} - \frac{1}{2N - 3} \right) + \left(\frac{1}{2N - 11} - \frac{1}{2N - 1} \right) + \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2N - 9} - \frac{1}{2N + 1} \right) + \left(\frac{1}{2N - 7} - \frac{1}{2N + 3} \right) + \left(\frac{1}{2N - 5} - \frac{1}{2N + 5} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{10} \left(\frac{1}{-3} + \frac{1}{-1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2N - 3} - \frac{1}{2N - 1} - \frac{1}{2N + 1} - \frac{1}{2N + 3} - \frac{1}{2N + 5} \right) = \\ &= \frac{1}{10} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2N - 3} - \frac{1}{2N - 1} - \frac{1}{2N + 1} - \frac{1}{2N + 3} - \frac{1}{2N + 5} \right), \end{aligned}$$

co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do $1/50$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą $1/50$.

Zadanie **19.**

Znajdź takie liczby rzeczywiste a, b, c, d , że funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = ax + b\sqrt{cx^2 + d}$$

jest odwrotna do funkcji $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem

$$g(x) = 8x + 3\sqrt{7x^2 + 5}.$$

Rozwiązanie:

Wykres funkcji g jest krzywą o równaniu

$$y = 8x + 3\sqrt{7x^2 + 5},$$

czyli

$$y - 8x = 3\sqrt{7x^2 + 5}.$$

Z powyższego równania wynika

$$y - x = 3\sqrt{7x^2 + 5} + 7x \geq \sqrt{63x^2 + 45} - 7|x| = \sqrt{63x^2 + 45} - \sqrt{49x^2} > 0,$$

a z podobnego równania

$$y - 8x = -3\sqrt{7x^2 + 5}$$

dochodzimy do

$$y - x = -3\sqrt{7x^2 + 5} + 7x \leq -\sqrt{63x^2 + 45} + 7|x| = -\sqrt{63x^2 + 45} + \sqrt{49x^2} < 0.$$

Zatem równanie wykresu funkcji g można podnieść do kwadratu uzupełniając je nierównością $y - x > 0$. Otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} y^2 - 16xy + 64x^2 &= 63x^2 + 45, & y - x > 0, \\ y^2 - 16xy + x^2 &= 45, & y - x > 0. \end{aligned}$$

Z uwagi na symetrię występowania x oraz y w powyższym równaniu, wykres funkcji f jako symetryczny do wykresu funkcji g względem prostej o równaniu $x = y$, jest określony tym samym równaniem. Jednakże nierówność $y - x > 0$ po zamianie x i y przybiera postać $y - x < 0$. Zatem wykres funkcji f jest określony warunkami

$$y^2 - 16xy + x^2 = 45, \quad y - x < 0,$$

co sprowadza się do równania

$$y - 8x = -3\sqrt{7x^2 + 5}.$$

Stąd

$$f(x) = 8x - 3\sqrt{7x^2 + 5}.$$

Odpowiedź: Funkcja f odwrotna do funkcji g określona jest wzorem¹

$$f(x) = 8x - 3\sqrt{7x^2 + 5}.$$

¹Czyli $a = 8, b = -3, c = 7, d = 5$, ale może być też $a = 8, b = -1, c = 63, d = 45$ lub ogólniej $a = 8, b = -1/r, c = 63r^3, d = 45r^2$, gdzie $r > 0$. Jednak w zadaniu chodzi po prostu o podanie wzoru na funkcję f w zadanej postaci, a nie bawienie się możliwymi wartościami współczynników, które w treści zadania występują tylko po to, aby sprecyzować jak ma wyglądać wzór definiujący funkcję f .

Zadanie **20.**

Na potrzeby tego zadania powiemy, że funkcja różniczkowalna $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest *cudowna*, jeżeli dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość

$$(f'(x))^2 = f(x) \, .$$

Na przykład dla każdej liczby rzeczywistej a funkcja f określona wzorem $f(x) = (x - a)^2/4$ jest cudowna.

Podaj przykład cudownej funkcji f spełniającej warunek $f(2) = f(10) = 1$.

Rozwiązanie:

Warunki zadania są spełnione przez funkcję

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x-4)^2}{4} & \text{dla } x \in (-\infty, 4] \, , \\ 0 & \text{dla } x \in (4, 8) \, , \\ \frac{(x-8)^2}{4} & \text{dla } x \in [8, +\infty) \, . \end{cases}$$