

Egzamin, **23.06.2025**, godz. 9:00–11:00

Zadanie **1** (10 punktów)

Udowodnij zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2 + 42}.$$

Rozwiązanie:

Spróbujemy udowodnić zbieżność danego szeregu korzystając z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

Aby to udowodnić, musimy zweryfikować prawdziwość trzech założeń tego kryterium.

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne – oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.

Sprawdzamy to następująco:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 42} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{42}{n^2}} = \frac{0}{1 + 0} = 0.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

Ten warunek jest najmniej oczywisty. Aby go udowodnić, powinniśmy wykazać, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{n}{n^2 + 42} \geq \frac{n + 1}{(n + 1)^2 + 42}, \tag{*}$$

co kolejno jest równoważne nierównościom

$$n \cdot (n^2 + 2n + 43) \geq (n + 1) \cdot (n^2 + 42),$$

$$n^3 + 2n^2 + 43n \geq n^3 + n^2 + 42n + 42,$$

$$n^2 + n \geq 42,$$

$$n \cdot (n + 1) \geq 6 \cdot 7,$$

skąd wynika, że nierówność (*) jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej $n \geq 6$.

Zatem szereg $\sum_{n=6}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2 + 42}$ spełnia warunki kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych, wobec czego jest zbieżny.

Ponieważ zbieżność szeregu nie zależy od zmiany lub pominięcia skończenie wielu wyrazów,

także szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2 + 42}$ jest zbieżny.

Zadanie **2** (10 punktów)

Oblicz sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3) \cdot (4n+5)}.$$

Rozwiązanie:

Szukamy takich liczb A i B , że

$$\frac{1}{(4n-3) \cdot (4n+5)} = \frac{A}{4n-3} + \frac{B}{4n+5}.$$

Po wymnożeniu powyższej równości stronami przez $(4n-3) \cdot (4n+5)$ otrzymujemy

$$1 = A(4n+5) + B(4n-3). \tag{*}$$

Dla $n = 3/4$ otrzymujemy $A = 1/8$, natomiast przyjęcie $n = -5/4$ daje $B = -1/8$.

Inny sposób: porównując w równaniu (*) współczynniki przy n oraz wyrazy wolne dostajemy układ równań i go rozwiązujemy.

Zatem N -ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{(4n-3) \cdot (4n+5)} = \frac{1}{8} \cdot \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+5} \right) = \\ &= \frac{1}{8} \cdot \left(\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{13} \right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{17} \right) + \left(\frac{1}{13} - \frac{1}{21} \right) + \left(\frac{1}{17} - \frac{1}{25} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \left(\frac{1}{4N-11} - \frac{1}{4N-3} \right) + \left(\frac{1}{4N-7} - \frac{1}{4N+1} \right) + \left(\frac{1}{4N-3} - \frac{1}{4N+5} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{8} \cdot \left(1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{4N+1} - \frac{1}{4N+5} \right), \end{aligned}$$

co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do

$$\frac{1}{8} \cdot \left(1 + \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{8} \cdot \frac{6}{5} = \frac{3}{20}.$$

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą $3/20$.

Uwaga: Kluczowym elementem rozwiązania jest poprawne wykonanie przejścia granicznego, co można uzyskać tylko przez rozważanie sum częściowych. Bez tego elementu zadanie nie może być uzanane za rozwiązane nawet przy poprawnej odpowiedzi, a rozwiązanie nie może być ocenione na więcej niż **4 punkty**.

Zadanie 3 (10 punktów)

Wyznacz zbiór wszystkich wartości rzeczywistych **dodatnich** parametru p , dla których szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[4]{n^4 + n^p} - n \right)$$

jest zbieżny.

Rozwiązanie:

W przypadku $p \geq 4$ mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[4]{n^4 + n^p} - n \right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[4]{n^4 + n^4} - n \right) = (\sqrt[4]{2} - 1) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n = \infty,$$

szereg jest więc rozbieżny.

W dalszej części rozwiązania założymy, że $p < 4$, a więc w konsekwencji $n^p \leq n^4$.

Przepisujemy wyrazy danego szeregu korzystając ze wzoru na różnicę czwartych potęg (dwukrotne zastosowanie wzoru na różnicę kwadratów):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[4]{n^4 + n^p} - n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{\left(\sqrt{n^4 + n^p} + n^2 \right) \cdot \left(\sqrt[4]{n^4 + n^p} + n \right)}.$$

Szacujemy szereg od góry:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{\left(\sqrt{n^4 + n^p} + n^2 \right) \cdot \left(\sqrt[4]{n^4 + n^p} + n \right)} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{\left(\sqrt{n^4 + 0} + n^2 \right) \cdot \left(\sqrt[4]{n^4 + 0} + n \right)} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{4n^3} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3-p}} < \infty, \end{aligned}$$

o ile $3 - p > 1$, czyli $p < 2$.

Stąd wnioskujemy, że dla $p < 2$ dany szereg jest zbieżny, natomiast powyższe szacowanie nie mówi o zbieżności szeregu dla $p \geq 2$.

Szacując szereg od dołu otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{\left(\sqrt{n^4 + n^p} + n^2 \right) \cdot \left(\sqrt[4]{n^4 + n^p} + n \right)} &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{\left(\sqrt{n^4 + 3n^4} + n^2 \right) \cdot \left(\sqrt[4]{n^4 + 15n^4} + n \right)} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{9n^3} = \frac{1}{9} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3-p}} = \infty, \end{aligned}$$

o ile $3 - p \leq 1$, czyli $p \geq 2$.

Stąd wnioskujemy, że dla $p \geq 2$ dany szereg jest rozbieżny, natomiast szacowanie od dołu nie mówi o zbieżności szeregu dla $p < 2$.

Po uwzględnieniu założenia o dodatniości p otrzymujemy:

Odpowiedź: Podany szereg jest zbieżny dla $p \in (0, 2)$.

Zadanie **4** (10 punktów)

Oblicz wartość całki oznaczonej

$$\int_0^{2\pi} \cos x \cdot \sin 3x \cdot \sin 4x \, dx .$$

Doprowadź wynik do postaci $w \cdot \pi$, gdzie w liczbą wymierną.

Rozwiązanie:

Użyjemy liczb zespolonych do wyprowadzenia odpowiedniej tożsamości trygonometrycznej.

Przyjmijmy $z = \cos x + i \sin x$, co daje

$$z^n = \cos nx + i \sin nx, \qquad z^{-n} = \cos nx - i \sin nx, \qquad \cos nx = \frac{z^n + z^{-n}}{2}, \qquad \sin nx = \frac{z^n - z^{-n}}{2i} .$$

Przy tych oznaczeniach otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \cos x \cdot \sin 3x \cdot \sin 4x &= \frac{z + z^{-1}}{2} \cdot \frac{z^3 - z^{-3}}{2i} \cdot \frac{z^4 - z^{-4}}{2i} = \frac{(z + z^{-1}) \cdot (z^3 - z^{-3}) \cdot (z^4 - z^{-4})}{-8} = \\ &= \frac{(z^4 + z^2 - z^{-2} - z^{-4}) \cdot (z^4 - z^{-4})}{-8} = \frac{z^8 + z^6 - z^2 - 2 - z^{-2} + z^{-6} + z^{-8}}{-8} = \\ &= -\frac{\cos 8x}{4} - \frac{\cos 6x}{4} + \frac{\cos 2x}{4} + \frac{1}{4} . \end{aligned}$$

Teraz możemy obliczyć daną w zadaniu całkę (zauważenie, że całka z cosinusa po pełnym okresie jest zerem, pozwala wydatnie uprościć obliczenia):

$$\int_0^{2\pi} \cos x \cdot \sin 3x \cdot \sin 4x \, dx = \int_0^{2\pi} -\frac{\cos 8x}{4} - \frac{\cos 6x}{4} + \frac{\cos 2x}{4} + \frac{1}{4} \, dx = \frac{\pi}{2} .$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość $\pi/2$.

Zadanie **5** (10 punktów)

Oblicz wartość całki oznaczonej

$$\int\limits_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + x^6}} \, dx \, .$$

Rozwiązanie:

Przekształcenie funkcji podcałkowej¹ oraz wykonanie podstawienia

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{1 + \sqrt{1 + x^2}} \, , \\ t^2 - 1 &= \sqrt{1 + x^2} \, , \\ (t^2 - 1)^2 &= t^4 - 2t^2 = x^2 \, , \\ (4t^3 - 4t) \, dt &= 2x \, dx \, , \\ (2t^3 - 2t) \, dt &= x \, dx \, , \end{aligned}$$

prowadzi do

$$\begin{aligned} \int\limits_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + x^6}} \, dx &= \int\limits_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{x^2 + x^2 \cdot \sqrt{1 + x^2}} \, dx = \int\limits_0^{2\sqrt{2}} x \cdot \sqrt{1 + \sqrt{1 + x^2}} \, dx = \int\limits_{\sqrt{2}}^2 t \cdot (2t^3 - 2t) \, dt = \\ &= 2 \cdot \int\limits_{\sqrt{2}}^2 t^4 - t^2 \, dt = \left. \frac{2t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} \right|_{t=\sqrt{2}}^2 = \frac{64}{5} - \frac{16}{3} - \frac{8 \cdot \sqrt{2}}{5} + \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{3} = \frac{192 - 80}{15} - \frac{(24 - 20) \cdot \sqrt{2}}{15} = \\ &= \frac{112}{15} - \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{15} = \frac{112 - 4 \cdot \sqrt{2}}{15} \, . \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość $\frac{112 - 4 \cdot \sqrt{2}}{15}$.

¹Dwukrotnie korzystamy beztrosko ze wzoru $\sqrt{a^2} = a$, bo w obu przypadkach a jest nieujemne, równe odpowiednio x^2 oraz x .

Zadanie **6** (10 punktów)

Wyznacz obszar zbieżności zespolonego szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{z^{12n}}{\sqrt[12]{n}}.$$

Rozwiązanie:

Dla $z=0$ szereg jest oczywiście zbieżny, zatem w dalszej części rozwiązania założymy, że $z \neq 0$.

Stosując kryterium d'Alemberta do danego szeregu otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z^{12n+12} \cdot \sqrt[12]{n}}{\sqrt[12]{n+1} \cdot z^{12n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |z|^{12} \cdot \sqrt[12]{\frac{n}{n+1}} = |z|^{12}.$$

Stąd wynika, że przy $|z|^{12} < 1$, czyli $|z| < 1$ szereg jest zbieżny, natomiast przy $|z|^{12} > 1$, czyli $|z| > 1$ szereg jest rozbieżny.

Pozostaje rozstrzygnąć zbieżność szeregu w przypadku $|z| = 1$.

Jeżeli $z^{12} = 1$, to dany szereg przyjmuje postać

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt[12]{n}} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{1/12}},$$

jest więc rozbieżny, bo $1/12 \leq 1$.

W przypadku, gdy $|z| = 1$, ale $z^{12} \neq 1$, dany szereg przyjmuje postać

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{w^n}{\sqrt[12]{n}},$$

gdzie $w = z^{12}$ jest liczbą zespoloną o module 1 różną od 1. Szereg ten spełnia założenia uogólnienia kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych, jest więc zbieżny.

Odpowiedź: Szereg jest zbieżny w kole o środku w zerze i promieniu 1 wraz z brzegiem, ale bez 12 punktów na brzegu. Tymi punktami są pierwiastki 12-go stopnia z 1: $\pm 1, \pm i, \frac{\pm 1 \pm_2 \sqrt{3}i}{2}, \frac{\pm \sqrt{3} \pm_2 i}{2}$.

Zadanie **7** (ZADANIE DODATKOWE)

Dany jest taki ciąg (a_n) o wyrazach dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leqslant 2.$$

Udowodnij, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 \leqslant 3.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ każdy wyraz szeregu o wyrazach dodatnich jest mniejszy od jego sumy, otrzymujemy dla każdego n nierówność

$$a_n^2 < \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leqslant 2,$$

skąd

$$a_n < \sqrt{2}.$$

Wobec tego

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot a_n^2) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2} \cdot a_n^2) = \sqrt{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leqslant \sqrt{2} \cdot 2 = \sqrt{8} < \sqrt{9} = 3.$$

Zadanie **8** (ZADANIE DODATKOWE)

Oblicz sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{(n-1)!}.$$

Rozwiązanie:

Przyjmijmy

$$z = \cos x + i \sin x.$$

Wówczas dla dowolnej liczby całkowitej n zachodzi równość

$$z^n = \cos nx + i \sin nx$$

i w konsekwencji

$$\cos nx = \operatorname{Re} z^n.$$

Przekształcamy dany w zadaniu szereg, korzystając po drodze ze wzorów:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad e^{x+yi} = e^x \cdot (\cos y + i \cdot \sin y).$$

Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{(n-1)!} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} z^n}{(n-1)!} = \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n-1)!} = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n!} = \operatorname{Re} \left(z \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) = \operatorname{Re} (z \cdot e^z) = \\ &= \operatorname{Re} \left((\cos x + i \sin x) \cdot e^{\cos x + i \sin x} \right) = \operatorname{Re} \left((\cos x + i \sin x) \cdot (e^{\cos x} \cdot (\cos \sin x + i \cdot \sin \sin x)) \right) = \\ &= e^{\cos x} \cdot (\cos x \cdot \cos \sin x - \sin x \cdot \sin \sin x). \end{aligned}$$

Odpowiedź: Suma szeregu danego w treści zadania jest równa

$$e^{\cos x} \cdot (\cos x \cdot \cos \sin x - \sin x \cdot \sin \sin x).$$