

ANALIZA 2

23 czerwca 2025 r., godz. 11:20–13:20

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadania 13, 14 i 15 to zadania dodatkowe.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Z ułamków nie trzeba wyłączać części całkowitej:
np. wystarczy podać $\frac{77}{3}$, ale $25\frac{2}{3}$ też będzie uznane.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry

NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

1. Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p , dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int_0^{\infty} \frac{x^3 + x^2}{\sqrt{x^{3p} + x^{2p}}} dx, \quad (8/3, 3)$

b) $\int_0^{\infty} \frac{x^4 + x^3}{\sqrt{x^{3p} + x^{2p}}} dx, \quad (10/3, 4)$

c) $\int_0^{\infty} \frac{x^5 + x^4}{\sqrt{x^{3p} + x^{2p}}} dx, \quad (4, 5)$

d) $\int_0^{\infty} \frac{x^6 + x^5}{\sqrt{x^{3p} + x^{2p}}} dx, \quad (14/3, 6)$

2. Podaj wartość całki oznaczonej.

a) $\int_0^{30} \sqrt{40x - x^2} dx = \frac{400\pi}{3} + 50\sqrt{3}$

b) $\int_{10}^{20} \sqrt{40x - x^2} dx = \frac{100\pi}{3} + 50\sqrt{3}$

c) $\int_0^{10} \sqrt{40x - x^2} dx = \frac{200\pi}{3} - 50\sqrt{3}$

d) $\int_0^{20} \sqrt{40x - x^2} dx = 100\pi$

3. Podaj w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów zbiór **wszystkich** wartości parametru p , dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2p^2 - 3)^n}{\sqrt{n}}, \quad (-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2})$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (2p^2 - 1)^n, \quad (-1, 0) \cup (0, 1)$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2p^2 - 7)^n}{n^2}, \quad [-2, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 2]$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2p^2 - 5)^n}{n}, \quad (-\sqrt{3}, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \sqrt{3})$

4. Podaj wartość całki oznaczonej, gdzie $[\cdot]$ oznacza część całkowitą.

a) $\int_0^{\pi} [4\sin^2 x] dx = 3\pi/2$

b) $\int_0^{\pi/4} [4\sin^2 x] dx = \pi/12$

c) $\int_0^{\pi/3} [4\sin^2 x] dx = \pi/4$

d) $\int_0^{\pi/2} [4\sin^2 x] dx = 3\pi/4$

5. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} \sqrt{\frac{4k+n}{n^3}} = 13/3$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2n+1}^{6n} \sqrt{\frac{4k+n}{n^3}} = 49/3$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{6n} \sqrt{\frac{4k+n}{n^3}} = 62/3$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{11n} \sqrt{\frac{4k+n}{n^3}} = \frac{65 \cdot \sqrt{5}}{3}$

6. Podaj wartość granicy.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2n+1}^{10n} \frac{1}{\sqrt{3kn+2n^2}} = \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{3}$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2n+1}^{16n} \frac{1}{\sqrt{3kn+2n^2}} = 2 \cdot \sqrt{2}$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=10n+1}^{16n} \frac{1}{\sqrt{3kn+2n^2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3}$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{6n} \frac{1}{\sqrt{3kn+2n^2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{3}$$

7. Podaj wartość granicy.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=8n+1}^{64n} \frac{1}{\sqrt[3]{k^2 n}} = 6$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{64n} \frac{1}{\sqrt[3]{k^2 n}} = 9$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{27n} \frac{1}{\sqrt[3]{k^2 n}} = 6$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{8n} \frac{1}{\sqrt[3]{k^2 n}} = 3$$

8. Podaj sumę szeregu.

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n+2]{n+3} \right) = \sqrt{3}$$

$$\text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n+1]{n+2} \right) = 1$$

$$\text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n+2} - \sqrt[n+2]{n+4} \right) = 3$$

$$\text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n+2} - \sqrt[n+1]{n+3} \right) = 2$$

9. Podaj promień zbieżności szeregu potęgowego.

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)! \cdot x^{3n}}{n^{3n}}, \quad R = \frac{e}{3}$$

$$\text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n)!}, \quad R = \frac{2}{e}$$

$$\text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! \cdot x^{2n}}{n^{2n}}, \quad R = \frac{e}{2}$$

$$\text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{3n} \cdot x^{3n}}{(3n)!}, \quad R = \frac{3}{e}$$

10. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = e^{x^2} + e^{x^3}.$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

$$\text{a) } f^{(60)}(0) = \frac{60!}{30!} + \frac{60!}{20!}$$

$$\text{b) } f^{(62)}(0) = \frac{62!}{31!}$$

$$\text{c) } f^{(61)}(0) = 0$$

$$\text{d) } f^{(63)}(0) = \frac{63!}{21!}$$

11. Dla danej liczby naturalnej n podaj taką liczbę wymierną w , że
 $2 \cdot \arctg(n) + \arctg w = \pi$.

a) $n = 2, \quad w = 4/3$

b) $n = 3, \quad w = 3/4$

c) $n = 4, \quad w = 8/15$

d) $n = 5, \quad w = 5/12$

12. Niech $f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k \cdot \sin kx}{n^k}$ oraz $C(m, n) = \int_0^{2\pi} f_m(x) \cdot f_n(x) dx$. Wówczas:

a) $C(8, 10) = 9\pi/71$

b) $C(7, 10) = 9\pi/61$

c) $C(5, 8) = 9\pi/31$

d) $C(4, 5) = 9\pi/11$

13. Niech $f_n(x) = \sum_{k=n+1}^{2n} \cos kx$ oraz $C(m, n) = \int_0^{2\pi} f_m(x) \cdot f_n(x) dx$. Wówczas:

a) $C(33, 50) = 16\pi$

b) $C(22, 40) = 4\pi$

c) $C(44, 80) = 8\pi$

d) $C(44, 50) = 38\pi$

14. Podaj wartość całki niewłaściwej.

a) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{22} + x} = \frac{\ln 2}{21}$

b) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^6 + x} = \frac{\ln 2}{5}$

c) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{10} + x} = \frac{\ln 2}{9}$

d) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{15} + x} = \frac{\ln 2}{14}$

15. Niech $R(k) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^k}}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^k}}$. Podaj w postaci liczby naturalnej:

a) $R(4) = 15$

b) $R(6) = 63$

c) $R(5) = 31$

d) $R(7) = 127$

ANALIZA 2

23 czerwca 2025 r., godz. 11:20–13:20

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadania 13, 14 i 15 to zadania dodatkowe.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Z ułamków nie trzeba wyłączać części całkowitej:
np. wystarczy podać $\frac{77}{3}$, ale $25\frac{2}{3}$ też będzie uznane.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry

NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

1. Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p , dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int_0^{\infty} \frac{x^5 + x^4}{\sqrt{x^{3p} + x^{2p}}} dx, \quad (4, 5)$

b) $\int_0^{\infty} \frac{x^4 + x^3}{\sqrt{x^{3p} + x^{2p}}} dx, \quad (10/3, 4)$

c) $\int_0^{\infty} \frac{x^3 + x^2}{\sqrt{x^{3p} + x^{2p}}} dx, \quad (8/3, 3)$

d) $\int_0^{\infty} \frac{x^6 + x^5}{\sqrt{x^{3p} + x^{2p}}} dx, \quad (14/3, 6)$

2. Podaj wartość całki oznaczonej.

a) $\int_0^{20} \sqrt{40x - x^2} dx = 100\pi$

b) $\int_0^{10} \sqrt{40x - x^2} dx = \frac{200\pi}{3} - 50\sqrt{3}$

c) $\int_0^{30} \sqrt{40x - x^2} dx = \frac{400\pi}{3} + 50\sqrt{3}$

d) $\int_{10}^{20} \sqrt{40x - x^2} dx = \frac{100\pi}{3} + 50\sqrt{3}$

3. Podaj w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów zbiór **wszystkich** wartości parametru p , dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2p^2 - 7)^n}{n^2}, \quad [-2, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 2]$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2p^2 - 3)^n}{\sqrt{n}}, \quad (-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2})$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (2p^2 - 1)^n, \quad (-1, 0) \cup (0, 1)$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2p^2 - 5)^n}{n}, \quad (-\sqrt{3}, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \sqrt{3})$

4. Podaj wartość całki oznaczonej, gdzie $[\cdot]$ oznacza część całkowitą.

a) $\int_0^{\pi} [4\sin^2 x] dx = 3\pi/2$

b) $\int_0^{\pi/2} [4\sin^2 x] dx = 3\pi/4$

c) $\int_0^{\pi/3} [4\sin^2 x] dx = \pi/4$

d) $\int_0^{\pi/4} [4\sin^2 x] dx = \pi/12$

5. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{11n} \sqrt{\frac{4k+n}{n^3}} = \frac{65 \cdot \sqrt{5}}{3}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2n+1}^{6n} \sqrt{\frac{4k+n}{n^3}} = 49/3$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{6n} \sqrt{\frac{4k+n}{n^3}} = 62/3$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} \sqrt{\frac{4k+n}{n^3}} = 13/3$

6. Podaj wartość granicy.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=10n+1}^{16n} \frac{1}{\sqrt{3kn+2n^2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3}$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2n+1}^{16n} \frac{1}{\sqrt{3kn+2n^2}} = 2 \cdot \sqrt{2}$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2n+1}^{10n} \frac{1}{\sqrt{3kn+2n^2}} = \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{3}$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{6n} \frac{1}{\sqrt{3kn+2n^2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{3}$$

7. Podaj wartość granicy.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{8n} \frac{1}{\sqrt[3]{k^2 n}} = 3$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{27n} \frac{1}{\sqrt[3]{k^2 n}} = 6$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=8n+1}^{64n} \frac{1}{\sqrt[3]{k^2 n}} = 6$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{64n} \frac{1}{\sqrt[3]{k^2 n}} = 9$$

8. Podaj sumę szeregu.

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n+2} - \sqrt[n+2]{n+4} \right) = 3$$

$$\text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n+2]{n+3} \right) = \sqrt{3}$$

$$\text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n+1]{n+2} \right) = 1$$

$$\text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n+2} - \sqrt[n+1]{n+3} \right) = 2$$

9. Podaj promień zbieżności szeregu potęgowego.

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)! \cdot x^{3n}}{n^{3n}}, \quad R = \frac{e}{3}$$

$$\text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{3n} \cdot x^{3n}}{(3n)!}, \quad R = \frac{3}{e}$$

$$\text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! \cdot x^{2n}}{n^{2n}}, \quad R = \frac{e}{2}$$

$$\text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n)!}, \quad R = \frac{2}{e}$$

10. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = e^{x^2} + e^{x^3}.$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

$$\text{a) } f^{(63)}(0) = \frac{63!}{21!}$$

$$\text{b) } f^{(62)}(0) = \frac{62!}{31!}$$

$$\text{c) } f^{(61)}(0) = 0$$

$$\text{d) } f^{(60)}(0) = \frac{60!}{30!} + \frac{60!}{20!}$$

11. Dla danej liczby naturalnej n podaj taką liczbę wymierną w , że
 $2 \cdot \arctg(n) + \arctg w = \pi$.

a) $n = 4, \quad w = 8/15$

b) $n = 3, \quad w = 3/4$

c) $n = 2, \quad w = 4/3$

d) $n = 5, \quad w = 5/12$

12. Niech $f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k \cdot \sin kx}{n^k}$ oraz $C(m, n) = \int_0^{2\pi} f_m(x) \cdot f_n(x) dx$. Wówczas:

a) $C(4, 5) = 9\pi/11$

b) $C(5, 8) = 9\pi/31$

c) $C(8, 10) = 9\pi/71$

d) $C(7, 10) = 9\pi/61$

13. Niech $f_n(x) = \sum_{k=n+1}^{2n} \cos kx$ oraz $C(m, n) = \int_0^{2\pi} f_m(x) \cdot f_n(x) dx$. Wówczas:

a) $C(44, 80) = 8\pi$

b) $C(33, 50) = 16\pi$

c) $C(22, 40) = 4\pi$

d) $C(44, 50) = 38\pi$

14. Podaj wartość całki niewłaściwej.

a) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{22} + x} = \frac{\ln 2}{21}$

b) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{15} + x} = \frac{\ln 2}{14}$

c) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{10} + x} = \frac{\ln 2}{9}$

d) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^6 + x} = \frac{\ln 2}{5}$

15. Niech $R(k) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^k}}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^k}}$. Podaj w postaci liczby naturalnej:

a) $R(7) = 127$

b) $R(6) = 63$

c) $R(5) = 31$

d) $R(4) = 15$

ANALIZA 2

23 czerwca 2025 r., godz. 11:20–13:20

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadania 13, 14 i 15 to zadania dodatkowe.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Z ułamków nie trzeba wyłączać części całkowitej:
np. wystarczy podać $\frac{77}{3}$, ale $25\frac{2}{3}$ też będzie uznane.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry

NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

1. Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p , dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int_0^{\infty} \frac{x^5 + x^4}{\sqrt{x^{3p} + x^{2p}}} dx, \quad (4, 5)$

b) $\int_0^{\infty} \frac{x^3 + x^2}{\sqrt{x^{3p} + x^{2p}}} dx, \quad (8/3, 3)$

c) $\int_0^{\infty} \frac{x^6 + x^5}{\sqrt{x^{3p} + x^{2p}}} dx, \quad (14/3, 6)$

d) $\int_0^{\infty} \frac{x^4 + x^3}{\sqrt{x^{3p} + x^{2p}}} dx, \quad (10/3, 4)$

2. Podaj wartość całki oznaczonej.

a) $\int_0^{30} \sqrt{40x - x^2} dx = \frac{400\pi}{3} + 50\sqrt{3}$

b) $\int_0^{10} \sqrt{40x - x^2} dx = \frac{200\pi}{3} - 50\sqrt{3}$

c) $\int_0^{20} \sqrt{40x - x^2} dx = 100\pi$

d) $\int_{10}^{20} \sqrt{40x - x^2} dx = \frac{100\pi}{3} + 50\sqrt{3}$

3. Podaj w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów zbiór **wszystkich** wartości parametru p , dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (2p^2 - 1)^n, \quad (-1, 0) \cup (0, 1)$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2p^2 - 3)^n}{\sqrt{n}}, \quad (-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2})$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2p^2 - 7)^n}{n^2}, \quad [-2, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 2]$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2p^2 - 5)^n}{n}, \quad (-\sqrt{3}, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \sqrt{3})$

4. Podaj wartość całki oznaczonej, gdzie $[\cdot]$ oznacza część całkowitą.

a) $\int_0^{\pi} [4\sin^2 x] dx = 3\pi/2$

b) $\int_0^{\pi/3} [4\sin^2 x] dx = \pi/4$

c) $\int_0^{\pi/2} [4\sin^2 x] dx = 3\pi/4$

d) $\int_0^{\pi/4} [4\sin^2 x] dx = \pi/12$

5. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{6n} \sqrt{\frac{4k+n}{n^3}} = 62/3$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} \sqrt{\frac{4k+n}{n^3}} = 13/3$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{11n} \sqrt{\frac{4k+n}{n^3}} = \frac{65 \cdot \sqrt{5}}{3}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2n+1}^{6n} \sqrt{\frac{4k+n}{n^3}} = 49/3$

6. Podaj wartość granicy.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=10n+1}^{16n} \frac{1}{\sqrt{3kn+2n^2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3}$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2n+1}^{10n} \frac{1}{\sqrt{3kn+2n^2}} = \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{3}$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{6n} \frac{1}{\sqrt{3kn+2n^2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{3}$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2n+1}^{16n} \frac{1}{\sqrt{3kn+2n^2}} = 2 \cdot \sqrt{2}$$

7. Podaj wartość granicy.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=8n+1}^{64n} \frac{1}{\sqrt[3]{k^2 n}} = 6$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{27n} \frac{1}{\sqrt[3]{k^2 n}} = 6$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{8n} \frac{1}{\sqrt[3]{k^2 n}} = 3$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{64n} \frac{1}{\sqrt[3]{k^2 n}} = 9$$

8. Podaj sumę szeregu.

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n+1]{n+2} \right) = 1$$

$$\text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n+2]{n+3} \right) = \sqrt{3}$$

$$\text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n+2} - \sqrt[n+2]{n+4} \right) = 3$$

$$\text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n+2} - \sqrt[n+1]{n+3} \right) = 2$$

9. Podaj promień zbieżności szeregu potęgowego.

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)! \cdot x^{3n}}{n^{3n}}, \quad R = \frac{e}{3}$$

$$\text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! \cdot x^{2n}}{n^{2n}}, \quad R = \frac{e}{2}$$

$$\text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{3n} \cdot x^{3n}}{(3n)!}, \quad R = \frac{3}{e}$$

$$\text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n)!}, \quad R = \frac{2}{e}$$

10. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = e^{x^2} + e^{x^3}.$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

$$\text{a) } f^{(61)}(0) = 0$$

$$\text{b) } f^{(60)}(0) = \frac{60!}{30!} + \frac{60!}{20!}$$

$$\text{c) } f^{(63)}(0) = \frac{63!}{21!}$$

$$\text{d) } f^{(62)}(0) = \frac{62!}{31!}$$

11. Dla danej liczby naturalnej n podaj taką liczbę wymierną w , że
 $2 \cdot \arctg(n) + \arctg w = \pi$.

a) $n = 4, \quad w = \mathbf{8/15}$

b) $n = 2, \quad w = \mathbf{4/3}$

c) $n = 5, \quad w = \mathbf{5/12}$

d) $n = 3, \quad w = \mathbf{3/4}$

12. Niech $f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k \cdot \sin kx}{n^k}$ oraz $C(m, n) = \int_0^{2\pi} f_m(x) \cdot f_n(x) dx$. Wówczas:

a) $C(8, 10) = \mathbf{9\pi/71}$

b) $C(5, 8) = \mathbf{9\pi/31}$

c) $C(4, 5) = \mathbf{9\pi/11}$

d) $C(7, 10) = \mathbf{9\pi/61}$

13. Niech $f_n(x) = \sum_{k=n+1}^{2n} \cos kx$ oraz $C(m, n) = \int_0^{2\pi} f_m(x) \cdot f_n(x) dx$. Wówczas:

a) $C(22, 40) = \mathbf{4\pi}$

b) $C(33, 50) = \mathbf{16\pi}$

c) $C(44, 80) = \mathbf{8\pi}$

d) $C(44, 50) = \mathbf{38\pi}$

14. Podaj wartość całki niewłaściwej.

a) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{22} + x} = \frac{\ln 2}{\mathbf{21}}$

b) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{10} + x} = \frac{\ln 2}{\mathbf{9}}$

c) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{15} + x} = \frac{\ln 2}{\mathbf{14}}$

d) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^6 + x} = \frac{\ln 2}{\mathbf{5}}$

15. Niech $R(k) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^k}}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^k}}$. Podaj w postaci liczby naturalnej:

a) $R(5) = \mathbf{31}$

b) $R(4) = \mathbf{15}$

c) $R(7) = \mathbf{127}$

d) $R(6) = \mathbf{63}$

ANALIZA 2

23 czerwca 2025 r., godz. 11:20–13:20

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadania 13, 14 i 15 to zadania dodatkowe.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Z ułamków nie trzeba wyłączać części całkowitej:
np. wystarczy podać $\frac{77}{3}$, ale $25\frac{2}{3}$ też będzie uznane.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry

NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

1. Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p , dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int_0^{\infty} \frac{x^3 + x^2}{\sqrt{x^{3p} + x^{2p}}} dx, \quad (8/3, 3)$

b) $\int_0^{\infty} \frac{x^6 + x^5}{\sqrt{x^{3p} + x^{2p}}} dx, \quad (14/3, 6)$

c) $\int_0^{\infty} \frac{x^4 + x^3}{\sqrt{x^{3p} + x^{2p}}} dx, \quad (10/3, 4)$

d) $\int_0^{\infty} \frac{x^5 + x^4}{\sqrt{x^{3p} + x^{2p}}} dx, \quad (4, 5)$

2. Podaj wartość całki oznaczonej.

a) $\int_0^{30} \sqrt{40x - x^2} dx = \frac{400\pi}{3} + 50\sqrt{3}$

b) $\int_0^{20} \sqrt{40x - x^2} dx = 100\pi$

c) $\int_{10}^{20} \sqrt{40x - x^2} dx = \frac{100\pi}{3} + 50\sqrt{3}$

d) $\int_0^{10} \sqrt{40x - x^2} dx = \frac{200\pi}{3} - 50\sqrt{3}$

3. Podaj w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów zbiór **wszystkich** wartości parametru p , dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2p^2 - 7)^n}{n^2}, \quad [-2, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 2]$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2p^2 - 3)^n}{\sqrt{n}}, \quad (-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2})$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2p^2 - 5)^n}{n}, \quad (-\sqrt{3}, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \sqrt{3})$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (2p^2 - 1)^n, \quad (-1, 0) \cup (0, 1)$

4. Podaj wartość całki oznaczonej, gdzie $[\cdot]$ oznacza część całkowitą.

a) $\int_0^{\pi} [4\sin^2 x] dx = 3\pi/2$

b) $\int_0^{\pi/2} [4\sin^2 x] dx = 3\pi/4$

c) $\int_0^{\pi/4} [4\sin^2 x] dx = \pi/12$

d) $\int_0^{\pi/3} [4\sin^2 x] dx = \pi/4$

5. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{6n} \sqrt{\frac{4k+n}{n^3}} = 62/3$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} \sqrt{\frac{4k+n}{n^3}} = 13/3$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2n+1}^{6n} \sqrt{\frac{4k+n}{n^3}} = 49/3$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{11n} \sqrt{\frac{4k+n}{n^3}} = \frac{65 \cdot \sqrt{5}}{3}$

6. Podaj wartość granicy.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2n+1}^{10n} \frac{1}{\sqrt{3kn+2n^2}} = \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{3}$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{6n} \frac{1}{\sqrt{3kn+2n^2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{3}$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2n+1}^{16n} \frac{1}{\sqrt{3kn+2n^2}} = 2 \cdot \sqrt{2}$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=10n+1}^{16n} \frac{1}{\sqrt{3kn+2n^2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3}$$

7. Podaj wartość granicy.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=8n+1}^{64n} \frac{1}{\sqrt[3]{k^2 n}} = 6$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{8n} \frac{1}{\sqrt[3]{k^2 n}} = 3$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{64n} \frac{1}{\sqrt[3]{k^2 n}} = 9$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{27n} \frac{1}{\sqrt[3]{k^2 n}} = 6$$

8. Podaj sumę szeregu.

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n+2} - \sqrt[n+2]{n+4} \right) = 3$$

$$\text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n+2]{n+3} \right) = \sqrt{3}$$

$$\text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n+2} - \sqrt[n+1]{n+3} \right) = 2$$

$$\text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n+1]{n+2} \right) = 1$$

9. Podaj promień zbieżności szeregu potęgowego.

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)! \cdot x^{3n}}{n^{3n}}, \quad R = \frac{e}{3}$$

$$\text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{3n} \cdot x^{3n}}{(3n)!}, \quad R = \frac{3}{e}$$

$$\text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n)!}, \quad R = \frac{2}{e}$$

$$\text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! \cdot x^{2n}}{n^{2n}}, \quad R = \frac{e}{2}$$

10. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = e^{x^2} + e^{x^3}.$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

$$\text{a) } f^{(61)}(0) = 0$$

$$\text{b) } f^{(60)}(0) = \frac{60!}{30!} + \frac{60!}{20!}$$

$$\text{c) } f^{(62)}(0) = \frac{62!}{31!}$$

$$\text{d) } f^{(63)}(0) = \frac{63!}{21!}$$

11. Dla danej liczby naturalnej n podaj taką liczbę wymierną w , że
 $2 \cdot \arctg(n) + \arctg w = \pi$.

a) $n = 2, \quad w = 4/3$

b) $n = 5, \quad w = 5/12$

c) $n = 3, \quad w = 3/4$

d) $n = 4, \quad w = 8/15$

12. Niech $f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k \cdot \sin kx}{n^k}$ oraz $C(m, n) = \int_0^{2\pi} f_m(x) \cdot f_n(x) dx$. Wówczas:

a) $C(8, 10) = 9\pi/71$

b) $C(4, 5) = 9\pi/11$

c) $C(7, 10) = 9\pi/61$

d) $C(5, 8) = 9\pi/31$

13. Niech $f_n(x) = \sum_{k=n+1}^{2n} \cos kx$ oraz $C(m, n) = \int_0^{2\pi} f_m(x) \cdot f_n(x) dx$. Wówczas:

a) $C(44, 80) = 8\pi$

b) $C(33, 50) = 16\pi$

c) $C(44, 50) = 38\pi$

d) $C(22, 40) = 4\pi$

14. Podaj wartość całki niewłaściwej.

a) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{22} + x} = \frac{\ln 2}{21}$

b) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{15} + x} = \frac{\ln 2}{14}$

c) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^6 + x} = \frac{\ln 2}{5}$

d) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{10} + x} = \frac{\ln 2}{9}$

15. Niech $R(k) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^k}}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^k}}$. Podaj w postaci liczby naturalnej:

a) $R(5) = 31$

b) $R(4) = 15$

c) $R(6) = 63$

d) $R(7) = 127$