

ANALIZA 2

23 czerwca 2025 r., godz. 11:20–13:20

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadania 13, 14 i 15 to zadania dodatkowe.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Z ułamków nie trzeba wyłączać części całkowitej:
np. wystarczy podać $\frac{77}{3}$, ale $25\frac{2}{3}$ też będzie uznane.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry

NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

1. Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p , dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int_0^{\infty} \frac{x^3 + x^2}{\sqrt{x^{3p} + x^{2p}}} dx, \dots\dots\dots$

b) $\int_0^{\infty} \frac{x^4 + x^3}{\sqrt{x^{3p} + x^{2p}}} dx, \dots\dots\dots$

c) $\int_0^{\infty} \frac{x^5 + x^4}{\sqrt{x^{3p} + x^{2p}}} dx, \dots\dots\dots$

d) $\int_0^{\infty} \frac{x^6 + x^5}{\sqrt{x^{3p} + x^{2p}}} dx, \dots\dots\dots$

2. Podaj wartość całki oznaczonej.

a) $\int_0^{30} \sqrt{40x - x^2} dx = \dots\dots\dots$

b) $\int_{10}^{20} \sqrt{40x - x^2} dx = \dots\dots\dots$

c) $\int_0^{10} \sqrt{40x - x^2} dx = \dots\dots\dots$

d) $\int_0^{20} \sqrt{40x - x^2} dx = \dots\dots\dots$

3. Podaj w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów zbiór **wszystkich** wartości parametru p , dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2p^2 - 3)^n}{\sqrt{n}}, \dots\dots\dots$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (2p^2 - 1)^n, \dots\dots\dots$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2p^2 - 7)^n}{n^2}, \dots\dots\dots$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2p^2 - 5)^n}{n}, \dots\dots\dots$

4. Podaj wartość całki oznaczonej, gdzie $[\cdot]$ oznacza część całkowitą.

a) $\int_0^{\pi} [4\sin^2 x] dx = \dots\dots\dots$

b) $\int_0^{\pi/4} [4\sin^2 x] dx = \dots\dots\dots$

c) $\int_0^{\pi/3} [4\sin^2 x] dx = \dots\dots\dots$

d) $\int_0^{\pi/2} [4\sin^2 x] dx = \dots\dots\dots$

5. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} \sqrt{\frac{4k+n}{n^3}} = \dots\dots\dots$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2n+1}^{6n} \sqrt{\frac{4k+n}{n^3}} = \dots\dots\dots$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{6n} \sqrt{\frac{4k+n}{n^3}} = \dots\dots\dots$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{11n} \sqrt{\frac{4k+n}{n^3}} = \dots\dots\dots$

6. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2n+1}^{10n} \frac{1}{\sqrt{3kn+2n^2}} = \dots\dots$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2n+1}^{16n} \frac{1}{\sqrt{3kn+2n^2}} = \dots\dots$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=10n+1}^{16n} \frac{1}{\sqrt{3kn+2n^2}} = \dots\dots$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{6n} \frac{1}{\sqrt{3kn+2n^2}} = \dots\dots$

7. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=8n+1}^{64n} \frac{1}{\sqrt[3]{k^2n}} = \dots\dots\dots$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{64n} \frac{1}{\sqrt[3]{k^2n}} = \dots\dots\dots$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{27n} \frac{1}{\sqrt[3]{k^2n}} = \dots\dots\dots$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{8n} \frac{1}{\sqrt[3]{k^2n}} = \dots\dots\dots$

8. Podaj sumę szeregu.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n+1} - {}^{n+2}\sqrt{n+3} \right) = \dots\dots$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n+1} - {}^{n+1}\sqrt{n+2} \right) = \dots\dots$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n+2} - {}^{n+2}\sqrt{n+4} \right) = \dots\dots$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n+2} - {}^{n+1}\sqrt{n+3} \right) = \dots\dots$

9. Podaj promień zbieżności szeregu potęgowego.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)! \cdot x^{3n}}{n^{3n}}, \quad R = \dots\dots\dots$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n)!}, \quad R = \dots\dots\dots$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! \cdot x^{2n}}{n^{2n}}, \quad R = \dots\dots\dots$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{3n} \cdot x^{3n}}{(3n)!}, \quad R = \dots\dots\dots$

10. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = e^{x^2} + e^{x^3}.$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(60)}(0) = \dots\dots\dots$

b) $f^{(62)}(0) = \dots\dots\dots$

c) $f^{(61)}(0) = \dots\dots\dots$

d) $f^{(63)}(0) = \dots\dots\dots$

11. Dla danej liczby naturalnej n podaj taką liczbę wymierną w , że
 $2 \cdot \arctg(n) + \arctg w = \pi$.

a) $n = 2, w = \dots\dots\dots$

b) $n = 3, w = \dots\dots\dots$

c) $n = 4, w = \dots\dots\dots$

d) $n = 5, w = \dots\dots\dots$

12. Niech $f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k \cdot \sin kx}{n^k}$ oraz $C(m, n) = \int_0^{2\pi} f_m(x) \cdot f_n(x) dx$. Wówczas:

a) $C(8, 10) = \dots\dots\dots$

b) $C(7, 10) = \dots\dots\dots$

c) $C(5, 8) = \dots\dots\dots$

d) $C(4, 5) = \dots\dots\dots$

13. Niech $f_n(x) = \sum_{k=n+1}^{2n} \cos kx$ oraz $C(m, n) = \int_0^{2\pi} f_m(x) \cdot f_n(x) dx$. Wówczas:

a) $C(33, 50) = \dots\dots\dots$

b) $C(22, 40) = \dots\dots\dots$

c) $C(44, 80) = \dots\dots\dots$

d) $C(44, 50) = \dots\dots\dots$

14. Podaj wartość całki niewłaściwej.

a) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{22} + x} = \dots\dots\dots$

b) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^6 + x} = \dots\dots\dots$

c) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{10} + x} = \dots\dots\dots$

d) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{15} + x} = \dots\dots\dots$

15. Niech $R(k) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^k}}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^k}}$. Podaj w postaci liczby naturalnej:

a) $R(4) = \dots\dots$ b) $R(6) = \dots\dots$ c) $R(5) = \dots\dots$ d) $R(7) = \dots\dots$