

Egzamin, **9.09.2025**, godz. 9:00–11:00

Zadanie **1** (10 punktów)

Wyznacz zbiór wszystkich wartości rzeczywistych **dodatnich** parametru p , dla których całka niewłaściwa

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt[5]{x^{3p} + x^{2p}}}{x^6 + x^4} \, dx$$

jest zbieżna.

Rozwiązanie:

Dzieląc przedział całkowania otrzymujemy

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt[5]{x^{3p} + x^{2p}}}{x^6 + x^4} \, dx = \int_0^1 \frac{\sqrt[5]{x^{3p} + x^{2p}}}{x^6 + x^4} \, dx + \int_1^\infty \frac{\sqrt[5]{x^{3p} + x^{2p}}}{x^6 + x^4} \, dx.$$

Zbadamy, dla których wartości parametru p całki występujące w powyższej sumie są zbieżne. W tym celu zauważymy, że funkcja podcałkowa jest dodatnia i skorzystamy z kryterium porównawczego dla całek niewłaściwych.

Po uwzględnieniu nierówności $3p > 2p$ otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[5]{x^{3p} + x^{2p}}}{x^6 + x^4} \, dx \leq \int_0^1 \frac{\sqrt[5]{x^{2p} + x^{2p}}}{0 + x^4} \, dx = \sqrt[5]{2} \cdot \int_0^1 \frac{dx}{x^{4-(2p/5)}} < +\infty,$$

o ile $4 - \frac{2p}{5} < 1$, czyli $p > 15/2$.

Ponadto

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[5]{x^{3p} + x^{2p}}}{x^6 + x^4} \, dx \geq \int_0^1 \frac{\sqrt[5]{0 + x^{2p}}}{x^4 + x^4} \, dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \frac{dx}{x^{4-(2p/5)}} = +\infty,$$

o ile $4 - \frac{2p}{5} \geq 1$, czyli $p \leq 15/2$.

Podobnie

$$\int_1^\infty \frac{\sqrt[5]{x^{3p} + x^{2p}}}{x^6 + x^4} \, dx \leq \int_1^\infty \frac{\sqrt[5]{x^{3p} + x^{3p}}}{x^6 + 0} \, dx = \sqrt[5]{2} \cdot \int_1^\infty \frac{dx}{x^{6-(3p/5)}} < +\infty,$$

o ile $6 - \frac{3p}{5} > 1$, czyli $p < 25/3$.

Ponadto

$$\int_1^\infty \frac{\sqrt[5]{x^{3p} + x^{2p}}}{x^6 + x^4} \, dx \geq \int_1^\infty \frac{\sqrt[5]{x^{3p} + x^{2p}}}{x^6 + x^4} \, dx = \frac{1}{2} \cdot \int_1^\infty \frac{dx}{x^{6-(3p/5)}} = +\infty,$$

o ile $6 - \frac{3p}{5} \leq 1$, czyli $p \geq 25/3$.

Wniosek: Jeżeli $15/2 < p < 25/3$, to obydwie całki powstałe z podziału przedziału całkowania są zbieżne, a więc i wyjściowa całka jest zbieżna. W przeciwnym razie jedna z tych całek jest rozbieżna, a zatem wyjściowa całka jest rozbieżna.

Odpowiedź: Podana całka jest zbieżna dla $p \in (15/2, 25/3)$.

Uwaga 1: Świadomość konieczności wykonania wszystkich czterech oszacowań jest kluczowym elementem rozwiązania. Bez tego elementu zadanie nie może być uzanane za rozwiązane nawet

przy poprawnej odpowiedzi i dwóch oszacowaniach, a rozwiązanie nie może być ocenione na więcej niż **4 punkty**.

Uwaga 2: Zadanie polega na udowodnieniu poprawności podanej odpowiedzi. Poprawną odpowiedź można odgadnąć stosując intuicyjne przymiarki w stylu: ten składnik jest dominujący, a pozostałe możemy zaniedbać. Takie postępowanie sprawdza się w zadaniu testowym, gdzie trzeba małym nakładem pracy odgadnąć poprawną odpowiedź bez podawania uzasadnienia. Jednak w przypadku zadania otwartego podanie samej tylko poprawnej odpowiedzi bez śladu oszacowań dowodzących jej poprawności nie stanowi rozwiązania zadania i w związku z tym nie może być ocenione na więcej niż **2 punkty**.

Zadanie 2 (10 punktów)

Oblicz sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1) \cdot (3n+5)}.$$

Rozwiązanie:

Szukamy takich liczb A i B , że

$$\frac{1}{(3n-1) \cdot (3n+5)} = \frac{A}{3n-1} + \frac{B}{3n+5}.$$

Po wymnożeniu powyższej równości stronami przez $(3n-1) \cdot (3n+5)$ otrzymujemy

$$1 = A(3n+5) + B(3n-1). \tag{*}$$

Dla $n = 1/3$ otrzymujemy $A = 1/6$, natomiast przyjęcie $n = -5/3$ daje $B = -1/6$.

Inny sposób: porównując w równaniu () współczynniki przy n oraz wyrazy wolne dostajemy układ równań i go rozwiązujemy.*

Zatem N -ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{(3n-1) \cdot (3n+5)} = \frac{1}{6} \cdot \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+5} \right) = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{11} \right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{14} \right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{17} \right) + \left(\frac{1}{14} - \frac{1}{20} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \left(\frac{1}{3N-7} - \frac{1}{3N-1} \right) + \left(\frac{1}{3N-4} - \frac{1}{3N+2} \right) + \left(\frac{1}{3N-1} - \frac{1}{3N+5} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{3N+2} - \frac{1}{3N+5} \right), \end{aligned}$$

co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do

$$\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{7}{10} = \frac{7}{60}.$$

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą $7/60$.

Uwaga: Kluczowym elementem rozwiązania jest poprawne wykonanie przejścia granicznego, co można uzyskać tylko przez rozważanie sum częściowych. Bez tego elementu zadanie nie może być uzanane za rozwiązane nawet przy poprawnej odpowiedzi, a rozwiązanie nie może być ocenione na więcej niż **4 punkty**.

Zadanie **3** (10 punktów)

Oblicz całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{x \, dx}{\sqrt[7]{x+7}}.$$

Rozwiązanie:

Sposób I (przez podstawienie):

Podstawiając¹ $t = \sqrt[7]{x+7}$, czyli $x = t^7 - 7$ i formalnie $dx = 7t^6 \, dt$ otrzymujemy:

$$\int \frac{x \, dx}{\sqrt[7]{x+7}} = \int \frac{(t^7 - 7) \cdot 7t^6 \, dt}{t} = 7 \cdot \int t^{12} - 7t^5 \, dt = \frac{7t^{13}}{13} - \frac{49t^6}{6} + C = \frac{7 \cdot (x+7)^{13/7}}{13} - \frac{49 \cdot (x+7)^{6/7}}{6} + C.$$

Odpowiedź:

$$\int \frac{x \, dx}{\sqrt[7]{x+7}} = \frac{7 \cdot (x+7)^{13/7}}{13} - \frac{49 \cdot (x+7)^{6/7}}{6} + C.$$

Sposób II (przez części):

$$\begin{aligned} \int \frac{x \, dx}{\sqrt[7]{x+7}} &= \int x \cdot \frac{1}{\sqrt[7]{x+7}} \, dx = x \cdot \frac{7}{6} \cdot (x+7)^{6/7} - \int 1 \cdot \frac{7}{6} \cdot (x+7)^{6/7} \, dx = \\ &= \frac{7}{6} \cdot x \cdot (x+7)^{6/7} - \frac{7}{6} \cdot \frac{7}{13} \cdot (x+7)^{13/7} + C = \frac{7}{6} \cdot x \cdot (x+7)^{6/7} - \frac{49}{78} \cdot (x+7)^{13/7} + C. \end{aligned}$$

Odpowiedź:

$$\int \frac{x \, dx}{\sqrt[7]{x+7}} = \frac{7}{6} \cdot x \cdot (x+7)^{6/7} - \frac{49}{78} \cdot (x+7)^{13/7} + C.$$

Uwaga: Na pierwszy rzut oka może się wydawać, że powyższe sposoby prowadzą do różnych odpowiedzi. W rzeczywistości w obu przypadkach dostajemy tę samą funkcję, tylko w innej postaci.

Zadanie **4** (10 punktów)

Oblicz wartość całki oznaczonej

$$\int_0^{2\pi} \sin x \cdot \sin 3x \cdot \cos 4x \, dx.$$

Doprowadź wynik do postaci $w \cdot \pi$, gdzie w liczbą wymierną.

Rozwiązanie:

Użyjemy liczb zespolonych do wyprowadzenia odpowiedniej tożsamości trygonometrycznej.

Przyjmijmy $z = \cos x + i \sin x$, co daje

$$z^n = \cos nx + i \sin nx, \quad z^{-n} = \cos nx - i \sin nx, \quad \cos nx = \frac{z^n + z^{-n}}{2}, \quad \sin nx = \frac{z^n - z^{-n}}{2i}.$$

Przy tych oznaczeniach otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \sin x \cdot \sin 3x \cdot \cos 4x &= \frac{z - z^{-1}}{2i} \cdot \frac{z^3 - z^{-3}}{2i} \cdot \frac{z^4 + z^{-4}}{2} = \frac{(z - z^{-1}) \cdot (z^3 - z^{-3}) \cdot (z^4 + z^{-4})}{-8} = \\ &= \frac{(z^4 - z^2 - z^{-2} + z^{-4}) \cdot (z^4 + z^{-4})}{-8} = \frac{z^8 - z^6 - z^2 + 2 - z^{-2} - z^{-6} + z^{-8}}{-8} = \end{aligned}$$

¹Zadziała też podstawienie $t = x + 7$.

$$= -\frac{\cos 8x}{4} + \frac{\cos 6x}{4} + \frac{\cos 2x}{4} - \frac{1}{4}.$$

Teraz możemy obliczyć daną w zadaniu całkę (zauważenie, że całka z cosinusa po pełnym okresie jest zerem, pozwala wydatnie uprościć obliczenia):

$$\int_0^{2\pi} \sin x \cdot \sin 3x \cdot \cos 4x \, dx = \int_0^{2\pi} -\frac{\cos 8x}{4} + \frac{\cos 6x}{4} + \frac{\cos 2x}{4} - \frac{1}{4} \, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość $-\pi/2$.

Zadanie **5** (10 punktów)

Oblicz całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{x+5}{x \cdot (x+3) \cdot (x+7) \cdot (x+10)} \, dx.$$

Rozwiązanie:

Sposób I (normalny):

Rozkładamy funkcję podcałkową na ułamki proste:

$$\begin{aligned} \frac{x+5}{x \cdot (x+3) \cdot (x+7) \cdot (x+10)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} + \frac{D}{x+7} + \frac{E}{x+10}, \\ x+5 &= \frac{A \cdot (x+3) \cdot (x+7) \cdot (x+10)}{x \cdot (x+3) \cdot (x+7) \cdot (x+10)} + \frac{B \cdot x \cdot (x+7) \cdot (x+10)}{x \cdot (x+3) \cdot (x+7) \cdot (x+10)} + \\ &+ \frac{D \cdot x \cdot (x+3) \cdot (x+10)}{x \cdot (x+3) \cdot (x+7) \cdot (x+10)} + \frac{E \cdot x \cdot (x+3) \cdot (x+7)}{x \cdot (x+3) \cdot (x+7) \cdot (x+10)}. \end{aligned} \tag{*}$$

W czasie, gdy miłośnicy rachunków są zajęci wymnażaniem wielomianu po prawej stronie równania (*), układaniem układu czterech równań liniowych z czterema niewiadomymi i rozwiązywaniem go, podstawimy² do równości (*) kolejno³ $x=0, -3, -7, -10$. Otrzymujemy:

dla $x=0$	$5=210A,$ skąd $A=1/42,$
dla $x=-3$	$2=-84B,$ skąd $B=-1/42,$
dla $x=-7$	$-2=84D,$ skąd $D=-1/42,$
dla $x=-10$	$-5=-210E,$ skąd $E=1/42.$

To pozwala dokończyć obliczanie danej w zadaniu całki:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+5}{x \cdot (x+3) \cdot (x+7) \cdot (x+10)} \, dx &= \frac{1}{42} \cdot \int \frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+7} + \frac{1}{x+10} \, dx = \\ &= \frac{1}{42} \cdot \left(\ln|x| - \ln|x+3| - \ln|x+7| + \ln|x+10| \right) + C. \end{aligned}$$

Sposób II (trikowy):

Przepisujemy daną całkę w postaci

$$\int \frac{x+5}{x \cdot (x+3) \cdot (x+7) \cdot (x+10)} \, dx = \int \frac{x+5}{\left(x \cdot (x+10)\right) \cdot \left((x+3) \cdot (x+7)\right)} \, dx =$$

²Taka metoda jest o wiele szybsza, zwłaszcza przy wysokim stopniu mianownika, jednak można ją wydajnie zastosować tylko w przypadku mianownika będącego iloczynem różnych czynników liniowych.

³To są wartości x , przy których czynniki liniowe się zerują.

$$= \int \frac{x+5}{(x^2+10x) \cdot (x^2+10x+21)} dx ,$$

a następnie podstawiamy $t = x^2 + 10x$ i formalnie $dt = 2 \cdot (x+5) dx$. Otrzymujemy

$$\int \frac{x+5}{(x^2+10x) \cdot (x^2+10x+21)} dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dt}{t \cdot (t+21)} .$$

Rozkład na ułamki proste prowadzi do

$$\frac{1}{t \cdot (t+21)} = \frac{1/21}{t} - \frac{1/21}{t+21} ,$$

co pozwala dokończyć obliczenia:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dt}{t \cdot (t+21)} &= \frac{1}{42} \cdot \int \frac{1}{t} - \frac{1}{t+21} dt = \frac{1}{42} \cdot \left(\ln|t| - \ln|t+21| \right) + C = \\ &= \frac{1}{42} \cdot \left(\ln|x^2+10x| - \ln|x^2+10x+21| \right) + C . \end{aligned}$$

Odpowiedź:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+5}{x \cdot (x+3) \cdot (x+7) \cdot (x+10)} dx &= \frac{1}{42} \cdot \left(\ln|x| - \ln|x+3| - \ln|x+7| + \ln|x+10| \right) + C = \\ &= \frac{1}{42} \cdot \left(\ln|x^2+10x| - \ln|x^2+10x+21| \right) + C = \frac{1}{42} \cdot \ln \left| \frac{x^2+10x}{x^2+10x+21} \right| + C . \end{aligned}$$

Zadanie 6 (10 punktów)

Oblicz całkę oznaczoną

$$\int_{-5}^{16} \frac{dx}{x^2+4x+16} .$$

Możesz otrzymać **6 punktów** za obliczenie całki oraz **4 punkty** za doprowadzenie wyniku do postaci niezawierającej "arctg".

Rozwiązanie:

Przekształcamy daną całkę i wykonujemy kolejno podstawienia $y = x + 2$ oraz $t = \frac{y}{2 \cdot \sqrt{3}}$:

$$\begin{aligned} \int_{-5}^{16} \frac{dx}{x^2+4x+16} &= \int_{-5}^{16} \frac{dx}{(x+2)^2+12} = \int_{-3}^{18} \frac{dy}{y^2+12} = \int_{-3}^{18} \frac{dy}{12 \cdot \left(\frac{y}{2 \cdot \sqrt{3}}\right)^2+12} = \\ &= \int_{-\sqrt{3}/2}^{3\sqrt{3}} \frac{2 \cdot \sqrt{3} dt}{12t^2+12} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}} \cdot \int_{-\sqrt{3}/2}^{3\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2+1} = \frac{\operatorname{arctg} t}{2 \cdot \sqrt{3}} \Big|_{t=-\sqrt{3}/2}^{3\sqrt{3}} = \frac{\operatorname{arctg} (3\sqrt{3}) - \operatorname{arctg} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2 \cdot \sqrt{3}} = \\ &= \frac{\operatorname{arctg} (3\sqrt{3}) + \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2 \cdot \sqrt{3}} . \end{aligned}$$

Upraszczamy $\operatorname{arctg} (3\sqrt{3}) + \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ korzystając z liczb zespolonych:

$$\operatorname{arctg} (3\sqrt{3}) + \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \arg (1 + 3\sqrt{3}i) + \arg \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \arg \left(1 - \frac{9}{2} + 3\sqrt{3}i + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) =$$

$$= \arg \left(-\frac{7}{2} + \frac{7\sqrt{3}}{2}i \right) = \arg \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi .$$

Z nierówności

$$0 < \arctg \left(3\sqrt{3} \right) + \arctg \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

wynika, że należy przyjąć $k=0$.

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość $\frac{\pi}{3 \cdot \sqrt{3}}$.

Zadanie **7** (ZADANIE DODATKOWE)

Udowodnij, że jeżeli szereg $\sum_{n=1}^\infty a_n$ o wyrazach dodatnich jest zbieżny, to zbieżny jest także szereg

$$\sum_{n=1}^\infty \sqrt[5]{\frac{a_n^3}{n^3}} .$$

Rozwiązanie:

Z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną zastosowaną do trzech liczb a_n i dwóch liczb $\frac{1}{n^{3/2}}$ otrzymujemy:

$$\sum_{n=1}^\infty \sqrt[5]{\frac{a_n^3}{n^3}} = \sum_{n=1}^\infty \sqrt[5]{a_n^3 \cdot \left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)^2} \leqslant \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{3}{5} \cdot a_n + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{n^{3/2}}\right) = \frac{3}{5} \cdot \sum_{n=1}^\infty a_n + \frac{2}{5} \cdot \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{3/2}} < \infty .$$

Ostatni szereg jest zbieżny, ponieważ $3/2 > 1$.

Zadanie **8** (ZADANIE DODATKOWE)

Podaj przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^\infty a_n$ o wyrazach dodatnich, że szereg

$$\sum_{n=1}^\infty \sqrt[5]{\frac{a_n^3}{n^2}}$$

jest rozbieżny. Uzasadnij poprawność podanego przykładu.

Rozwiązanie:

Niech $a_1 = 2025$ oraz

$$a_n = \frac{1}{n \cdot (\ln n)^{3/2}} \quad \text{dla} \quad n \geqslant 2 .$$

Wówczas

$$\sum_{n=1}^\infty a_n = 2025 + \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \cdot (\ln n)^{3/2}}$$

jest szeregiem zbieżnym, bo $3/2 > 1$.

Natomiast szereg

$$\sum_{n=1}^\infty \sqrt[5]{\frac{a_n^3}{n^2}} = \sqrt[5]{2025} + \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \cdot (\ln n)^{9/10}}$$

jest rozbieżny, gdyż $9/10 \leqslant 1$.

Uwaga: Wykładnik $3/2$ można zastąpić dowolnym innym z przedziału $(1, 5/3]$.