

ANALIZA 2

9 września 2025 r., godz. 11:20–13:20

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadania 13 i 14 to zadania dodatkowe.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Z ułamków nie trzeba wyłączać części całkowitej:
np. wystarczy podać $\frac{77}{3}$, ale $25\frac{2}{3}$ też będzie uznane.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry

NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

1. Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p , dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int_0^{\infty} \frac{x^3 + x^2}{\sqrt[3]{x^{3p} + x^{2p}}} dx, \quad (4, 9/2)$

b) $\int_0^{\infty} \frac{x^4 + x^3}{\sqrt[3]{x^{3p} + x^{2p}}} dx, \quad (5, 6)$

c) $\int_0^{\infty} \frac{x^5 + x^4}{\sqrt[3]{x^{3p} + x^{2p}}} dx, \quad (6, 15/2)$

d) $\int_0^{\infty} \frac{x^6 + x^5}{\sqrt[3]{x^{3p} + x^{2p}}} dx, \quad (7, 9)$

2. Podaj wartość całki oznaczonej.

a) $\int_0^4 \sqrt{16x - x^2} dx = \frac{32\pi}{3} - 8\sqrt{3}$

b) $\int_4^8 \sqrt{16x - x^2} dx = \frac{16\pi}{3} + 8\sqrt{3}$

c) $\int_0^{8-4\sqrt{2}} \sqrt{16x - x^2} dx = 8\pi - 16$

d) $\int_0^8 \sqrt{16x - x^2} dx = 16\pi$

3. Podaj w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów zbiór **wszystkich** wartości parametru p , dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p^3 - 1)^n}{\sqrt{n}}, \quad [0, \sqrt[3]{2})$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (p^2 - 1)^n, \quad (-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2})$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p^6 - 1)^n}{n^2}, \quad [-\sqrt[6]{2}, \sqrt[6]{2}]$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p^4 - 1)^n}{n}, \quad (-\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2})$

4. Podaj wartość całki oznaczonej, gdzie $[\cdot]$ oznacza część całkowitą.

a) $\int_0^{18} [\sqrt[4]{x}] dx = 19$

b) $\int_0^{15} [\sqrt[4]{x}] dx = 14$

c) $\int_0^{16} [\sqrt[4]{x}] dx = 15$

d) $\int_0^{17} [\sqrt[4]{x}] dx = 17$

5. Niech $C(a, b) = \int_a^b \frac{dx}{x \cdot \ln x}$. Podaj w postaci zawierającej **co najwyżej jeden symbol "ln"**.

a) $C(\sqrt{2}, 64) = \ln 12$

b) $C(\sqrt[5]{5}, 125) = \ln 15$

c) $C(\sqrt[3]{3}, 81) = \ln 12$

d) $C(\sqrt[7]{7}, 49) = \ln 14$

6. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{6n} \sqrt{\frac{k+3n}{n^3}} = \mathbf{38/3}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{13n} \sqrt{\frac{k+3n}{n^3}} = \mathbf{112/3}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{22n} \sqrt{\frac{k+3n}{n^3}} = \mathbf{78}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{9n} \sqrt{\frac{k+3n}{n^3}} = \mathbf{14 \cdot \sqrt{3}}$

7. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2n+1}^{9n} \sqrt[3]{\frac{k-n}{n^4}} = \mathbf{45/4}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2n+1}^{28n} \sqrt[3]{\frac{k-n}{n^4}} = \mathbf{60}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{9n} \sqrt[3]{\frac{k-n}{n^4}} = \mathbf{12}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \sqrt[3]{\frac{k-n}{n^4}} = \mathbf{3/4}$

8. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{81n} \frac{1}{\sqrt[4]{k^3 n}} = \mathbf{8}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{16n} \frac{1}{\sqrt[4]{k^3 n}} = \mathbf{4}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2n+1}^{32n} \frac{1}{\sqrt[4]{k^3 n}} = \mathbf{4 \cdot \sqrt[4]{2}}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=16n+1}^{81n} \frac{1}{\sqrt[4]{k^3 n}} = \mathbf{4}$

9. Podaj sumę szeregu.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n+4} - \sqrt[n+2]{n+6} \right) = \mathbf{3 + \sqrt{6}}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n+3} - \sqrt[n+1]{n+4} \right) = \mathbf{3}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n+3} - \sqrt[n+2]{n+5} \right) = \mathbf{2 + \sqrt{5}}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n+4} - \sqrt[n+1]{n+5} \right) = \mathbf{4}$

10. Podaj promień zbieżności szeregu potęgowego.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{4n} \cdot x^n}{(4n)!}, \quad R = \frac{\mathbf{256}}{\mathbf{e^4}}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n)! \cdot x^{2n}}{n^{4n}}, \quad R = \frac{\mathbf{e^2}}{\mathbf{16}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{4n} \cdot x^{4n}}{(4n)!}, \quad R = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{e}}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n)! \cdot x^{8n}}{n^{4n}}, \quad R = \frac{\mathbf{\sqrt{e}}}{\mathbf{2}}$

11. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = e^{x^5} + \ln(1 + x^5).$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(65)}(0) = \frac{\mathbf{65!}}{\mathbf{13!}} + \frac{\mathbf{65!}}{\mathbf{13}}$

b) $f^{(60)}(0) = \frac{\mathbf{60!}}{\mathbf{12!}} - \frac{\mathbf{60!}}{\mathbf{12}}$

c) $f^{(55)}(0) = \frac{\mathbf{55!}}{\mathbf{11!}} + \frac{\mathbf{55!}}{\mathbf{11}}$

d) $f^{(50)}(0) = \frac{\mathbf{50!}}{\mathbf{10!}} - \frac{\mathbf{50!}}{\mathbf{10}}$

12. Dla danej liczby naturalnej n podaj taką liczbę wymierną w , że

$$2 \cdot \arctg(n) + \arctg w = \pi.$$

a) $n = 7, \quad w = \mathbf{7/24}$

b) $n = 6, \quad w = \mathbf{12/35}$

c) $n = 9, \quad w = \mathbf{9/40}$

d) $n = 8, \quad w = \mathbf{16/63}$

13. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{7n} \ln \sqrt[n]{\frac{k+n}{n}} = \mathbf{22 \cdot \ln 2 - 6}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \ln \sqrt[n]{\frac{k+n}{n}} = \mathbf{3 \cdot \ln 3 - 2 \cdot \ln 2 - 1}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2n+1}^{3n} \ln \sqrt[n]{\frac{k+n}{n}} = \mathbf{8 \cdot \ln 2 - 3 \cdot \ln 3 - 1}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{7n} \ln \sqrt[n]{\frac{k+n}{n}} = \mathbf{24 \cdot \ln 2 - 7}$

14. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \sqrt[n]{\prod_{k=n+1}^{2n} (k+n)} \right) = \frac{\mathbf{27}}{\mathbf{4e}}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^7} \cdot \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{7n} (k+n)} \right) = \frac{\mathbf{2^{24}}}{\mathbf{e^7}}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \sqrt[n]{\prod_{k=2n+1}^{3n} (k+n)} \right) = \frac{\mathbf{256}}{\mathbf{27e}}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^6} \cdot \sqrt[n]{\prod_{k=n+1}^{7n} (k+n)} \right) = \frac{\mathbf{2^{22}}}{\mathbf{e^6}}$