

ANALIZA 2

9 września 2025 r., godz. 11:20–13:20

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadania 13 i 14 to zadania dodatkowe.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Z ułamków nie trzeba wyłączać części całkowitej:
np. wystarczy podać $\frac{77}{3}$, ale $25\frac{2}{3}$ też będzie uznane.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry

NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

1. Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p , dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int_0^{\infty} \frac{x^3 + x^2}{\sqrt[3]{x^{3p} + x^{2p}}} dx, \dots\dots\dots$

b) $\int_0^{\infty} \frac{x^4 + x^3}{\sqrt[3]{x^{3p} + x^{2p}}} dx, \dots\dots\dots$

c) $\int_0^{\infty} \frac{x^5 + x^4}{\sqrt[3]{x^{3p} + x^{2p}}} dx, \dots\dots\dots$

d) $\int_0^{\infty} \frac{x^6 + x^5}{\sqrt[3]{x^{3p} + x^{2p}}} dx, \dots\dots\dots$

2. Podaj wartość całki oznaczonej.

a) $\int_0^4 \sqrt{16x - x^2} dx = \dots\dots\dots$

b) $\int_4^8 \sqrt{16x - x^2} dx = \dots\dots\dots$

c) $\int_0^{8-4\sqrt{2}} \sqrt{16x - x^2} dx = \dots\dots\dots$

d) $\int_0^8 \sqrt{16x - x^2} dx = \dots\dots\dots$

3. Podaj w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów zbiór **wszystkich** wartości parametru p , dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p^3 - 1)^n}{\sqrt{n}}, \dots\dots\dots$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (p^2 - 1)^n, \dots\dots\dots$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p^6 - 1)^n}{n^2}, \dots\dots\dots$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p^4 - 1)^n}{n}, \dots\dots\dots$

4. Podaj wartość całki oznaczonej, gdzie $[\cdot]$ oznacza część całkowitą.

a) $\int_0^{18} [\sqrt[4]{x}] dx = \dots\dots\dots$

b) $\int_0^{15} [\sqrt[4]{x}] dx = \dots\dots\dots$

c) $\int_0^{16} [\sqrt[4]{x}] dx = \dots\dots\dots$

d) $\int_0^{17} [\sqrt[4]{x}] dx = \dots\dots\dots$

5. Niech $C(a, b) = \int_a^b \frac{dx}{x \cdot \ln x}$. Podaj w postaci zawierającej **co najwyżej jeden symbol "ln"**.

a) $C(\sqrt{2}, 64) = \dots\dots\dots$

b) $C(\sqrt[5]{5}, 125) = \dots\dots\dots$

c) $C(\sqrt[3]{3}, 81) = \dots\dots\dots$

d) $C(\sqrt[7]{7}, 49) = \dots\dots\dots$

6. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{6n} \sqrt{\frac{k+3n}{n^3}} = \dots\dots\dots$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{13n} \sqrt{\frac{k+3n}{n^3}} = \dots\dots\dots$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{22n} \sqrt{\frac{k+3n}{n^3}} = \dots\dots\dots$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{9n} \sqrt{\frac{k+3n}{n^3}} = \dots\dots\dots$

7. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2n+1}^{9n} \sqrt[3]{\frac{k-n}{n^4}} = \dots\dots\dots$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2n+1}^{28n} \sqrt[3]{\frac{k-n}{n^4}} = \dots\dots\dots$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{9n} \sqrt[3]{\frac{k-n}{n^4}} = \dots\dots\dots$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \sqrt[3]{\frac{k-n}{n^4}} = \dots\dots\dots$

8. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{81n} \frac{1}{\sqrt[4]{k^3 n}} = \dots\dots\dots$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{16n} \frac{1}{\sqrt[4]{k^3 n}} = \dots\dots\dots$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2n+1}^{32n} \frac{1}{\sqrt[4]{k^3 n}} = \dots\dots\dots$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=16n+1}^{81n} \frac{1}{\sqrt[4]{k^3 n}} = \dots\dots\dots$

9. Podaj sumę szeregu.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n+4} - \sqrt[n+2]{n+6} \right) = \dots\dots$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n+3} - \sqrt[n+1]{n+4} \right) = \dots\dots$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n+3} - \sqrt[n+2]{n+5} \right) = \dots\dots$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n+4} - \sqrt[n+1]{n+5} \right) = \dots\dots$

10. Podaj promień zbieżności szeregu potęgowego.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{4n} \cdot x^n}{(4n)!}, \quad R = \dots\dots\dots$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n)! \cdot x^{2n}}{n^{4n}}, \quad R = \dots\dots\dots$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{4n} \cdot x^{4n}}{(4n)!}, \quad R = \dots\dots\dots$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n)! \cdot x^{8n}}{n^{4n}}, \quad R = \dots\dots\dots$

11. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = e^{x^5} + \ln(1 + x^5).$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(65)}(0) = \dots\dots\dots$

b) $f^{(60)}(0) = \dots\dots\dots$

c) $f^{(55)}(0) = \dots\dots\dots$

d) $f^{(50)}(0) = \dots\dots\dots$

12. Dla danej liczby naturalnej n podaj taką liczbę wymierną w , że

$$2 \cdot \arctg(n) + \arctg w = \pi.$$

a) $n = 7, \quad w = \dots\dots\dots$

b) $n = 6, \quad w = \dots\dots\dots$

c) $n = 9, \quad w = \dots\dots\dots$

d) $n = 8, \quad w = \dots\dots\dots$

13. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{7n} \ln \sqrt[n]{\frac{k+n}{n}} = \dots\dots\dots$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \ln \sqrt[n]{\frac{k+n}{n}} = \dots\dots\dots$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2n+1}^{3n} \ln \sqrt[n]{\frac{k+n}{n}} = \dots\dots\dots$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{7n} \ln \sqrt[n]{\frac{k+n}{n}} = \dots\dots\dots$

14. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \sqrt[n]{\prod_{k=n+1}^{2n} (k+n)} \right) = \dots\dots$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^7} \cdot \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{7n} (k+n)} \right) = \dots\dots$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \sqrt[n]{\prod_{k=2n+1}^{3n} (k+n)} \right) = \dots$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^6} \cdot \sqrt[n]{\prod_{k=n+1}^{7n} (k+n)} \right) = \dots$