

Zadanie 1 (10 punktów)

Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

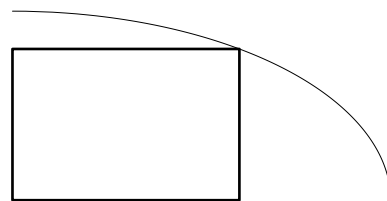
$$64^n \cdot \binom{2n}{n} > 27^n \cdot \binom{4n}{n}.$$

Zadanie 2 (10 punktów)

Udowodnij, że liczba $\log_{(7/10)} \left(\frac{5\sqrt{2}}{7} \right)$ jest niewymierna.

Zadanie 3 (10 punktów)

Jakie największe pole może mieć prostokąt jak na rysunku obok? Jeden wierzchołek to $(0, 0)$, a przeciwległy wierzchołek leży na fragmencie elipsy o równaniu $x^2 + 4y^2 = 4$ odpowiadającym $x, y > 0$.



Zadanie 4 (10 punktów)

Dana jest funkcja $f : (666, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \sqrt[666]{x^{666} - 666}.$$

Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych $x, y > 666$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \geq |x - y|.$$

Zadanie 5 (10 punktów)

Oblicz sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(10n-3)(10n+7)}.$$

Zadanie 6 (10 punktów)

Niech funkcja $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x) = \sqrt{x} - \ln x.$$

Rozstrzygnij, która z liczb jest większa:

$$f(17) \approx 1,2899 \quad \text{czy} \quad f(16) + \frac{1}{16} \approx 1,2899 ?$$

Zadanie **7** (DODATKOWE za 10 punktów z mnożnikiem ustalonym po egzaminie)

Podaj przykład takiej funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzą warunki

$$f(x) \neq x \quad \text{oraz} \quad f(f(f(x))) = x.$$

Uzasadnij poprawność podanego przykładu.