

ANALIZA 1

5 lutego 2026 r., godz. 11:20–13:20

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadania 13, 14 i 15 to zadania dodatkowe.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Z ułamków nie trzeba wyłączać części całkowitej:
np. wystarczy podać $\frac{77}{3}$, ale $25\frac{2}{3}$ też będzie uznane.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry

NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

1. Dla podanej liczby k podaj liczbę naturalną $n > k$ spełniającą równanie

$$4 \cdot \binom{n}{k} = 3 \cdot \binom{n}{k+1}.$$

- a) $k = 5, \quad n = \dots\dots\dots$ b) $k = 8, \quad n = \dots\dots\dots$
 c) $k = 11, \quad n = \dots\dots\dots$ d) $k = 14, \quad n = \dots\dots\dots$

2. Podaj wartość granicy dla tak dobranego parametru k , aby granica ta była dodatnia i skończona.

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[6]{n^{30} + kn^k} - n^5 \right) = \dots\dots\dots$ dla $k = \dots\dots\dots$
 b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[5]{n^{30} + kn^k} - n^6 \right) = \dots\dots\dots$ dla $k = \dots\dots\dots$
 c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^{30} + kn^k} - n^{10} \right) = \dots\dots\dots$ dla $k = \dots\dots\dots$
 d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^{30} + kn^k} - n^{15} \right) = \dots\dots\dots$ dla $k = \dots\dots\dots$

3. Podaj kresy zbiorów.

- a) $\sup \left\{ \sqrt{n^2 + 3n + 2} - n : n \in \mathbb{N} \right\} = \dots\dots\dots$
 b) $\inf \left\{ \sqrt{n^2 + 3n + 2} - n : n \in \mathbb{N} \right\} = \dots\dots\dots$
 c) $\sup \left\{ \sqrt{n^2 + 3n + 3} - n : n \in \mathbb{N} \right\} = \dots\dots\dots$
 d) $\inf \left\{ \sqrt{n^2 + 3n + 3} - n : n \in \mathbb{N} \right\} = \dots\dots\dots$

4. Podaj wartość granicy.

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=4n+1}^{8n} \frac{kn^2}{\sqrt[3]{8n^{12} + k}} = \dots\dots\dots$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{5n} \frac{kn^2}{\sqrt[3]{8n^{12} + k}} = \dots\dots\dots$
 c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2n+1}^{6n} \frac{kn^2}{\sqrt[3]{8n^{12} + k}} = \dots\dots\dots$ d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=3n+1}^{7n} \frac{kn^2}{\sqrt[3]{8n^{12} + k}} = \dots\dots\dots$

5. Podaj liczbę podzbiorów A zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ spełniających warunki $\forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (n+5) \in A)$ oraz

- a) $4, 5, 6, 7, 8 \in A \quad \dots\dots\dots$ b) $6, 7, 8, 9, 10 \in A \quad \dots\dots\dots$
 c) $5, 6, 7, 8, 9 \in A \quad \dots\dots\dots$ d) $7, 8, 9, 10, 11 \in A \quad \dots\dots\dots$

6. Niech $f_n(x) = \sqrt{x^n}$. Podaj wzór na pochodną trzeciego rzędu.

- a) $f_1'''(x) = \dots\dots\dots$ b) $f_3'''(x) = \dots\dots\dots$
 c) $f_5'''(x) = \dots\dots\dots$ d) $f_{-1}'''(x) = \dots\dots\dots$

7. Niech a_k i b_k będą takimi liczbami, że prosta o równaniu $y = a_k x + b_k$ jest styczna w punkcie (k, k^4) do krzywej o równaniu $y = x^4$. Wówczas:

- a) $a_{-2} = \dots\dots\dots$ $b_{-2} = \dots\dots\dots$ b) $a_{-1} = \dots\dots\dots$ $b_{-1} = \dots\dots\dots$
 c) $a_2 = \dots\dots\dots$ $b_2 = \dots\dots\dots$ d) $a_1 = \dots\dots\dots$ $b_1 = \dots\dots\dots$

8. Niech $f(x) = x^2 + 2x$. Podaj przeciwobrazy przedziałów otwartych.

- a) $f^{-1}[(3, 8)] = \dots\dots\dots$ b) $f^{-1}[(-1, 15)] = \dots\dots\dots$
 c) $f^{-1}[(24, 48)] = \dots\dots\dots$ d) $f^{-1}[(0, 3)] = \dots\dots\dots$

9. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = \ln(1+x^5) + \ln(1+x^4).$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

- a) $f^{(80)}(0) = \dots\dots\dots$ b) $f^{(60)}(0) = \dots\dots\dots$
 c) $f^{(64)}(0) = \dots\dots\dots$ d) $f^{(65)}(0) = \dots\dots\dots$

10. Niech g będzie funkcją odwrotną do funkcji $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem $f(x) = x \cdot \sqrt{x} + \sqrt{x} + 1$. Podaj wartość pochodnej.

- a) $g'(3) = \dots\dots\dots$ b) $g'(31) = \dots\dots\dots$
 c) $g'(11) = \dots\dots\dots$ d) $g'(69) = \dots\dots\dots$

11. Podaj sumę szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^6}}{6^n} = \dots\dots\dots$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{6^n}}{6^n} = \dots\dots\dots$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^5}}{5^n} = \dots\dots\dots$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{5^n}}{5^n} = \dots\dots\dots$

12. Podaj sumę szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{2n+2} \right) = \dots\dots\dots$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n+1} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{2n+3} \right) = \dots\dots\dots$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n+2} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{2n+4} \right) = \dots\dots\dots$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n+3} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{2n+5} \right) = \dots\dots\dots$

13. Niech $f(x) = \ln(1+x+x^2)$. Wówczas:

a) $f^{(61)}(0) = \dots\dots\dots$

b) $f^{(60)}(0) = \dots\dots\dots$

c) $f^{(63)}(0) = \dots\dots\dots$

d) $f^{(62)}(0) = \dots\dots\dots$

14. Niech $f(x) = \ln(1+x+x^2+x^3)$. Wówczas:

a) $f^{(70)}(0) = \dots\dots\dots$

b) $f^{(60)}(0) = \dots\dots\dots$

c) $f^{(61)}(0) = \dots\dots\dots$

d) $f^{(64)}(0) = \dots\dots\dots$

15. Podaj taką wartość rzeczywistą dodatnią parametru p , aby podana granica była dodatnia i skończona.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n^2} \frac{kn^{21}}{(n^p+k)^p}, \quad p = \dots\dots\dots$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n^4} \frac{kn^{21}}{(n^p+k)^p}, \quad p = \dots\dots\dots$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n^3} \frac{kn^{21}}{(n^p+k)^p}, \quad p = \dots\dots\dots$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n^5} \frac{kn^{21}}{(n^p+k)^p}, \quad p = \dots\dots\dots$