

Egzamin, **16.02.2026**, godz. 9:00–11:00Zadanie **1** (10 punktów)

Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$500n < 2^n + 4000.$$

Rozwiązanie:

Dowód nierówności podzielimy na dwa przypadki.

Przypadek pierwszy: $n \leq 8$.

Dla $n \leq 8$ zachodzą nierówności

$$500n \leq 500 \cdot 8 = 4000 < 2^n + 4000,$$

skąd wynika prawdziwość nierówności danej w zadaniu.

Przypadek drugi: $n \geq 9$.

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 9$ porównujemy lewą i prawą stronę nierówności danej w treści zadania:

$$L = 500 \cdot 9 = 4500,$$

$$P = 2^9 + 4000 = 4512,$$

skąd $L < P$.

2° Niech $n \geq 9$ będzie taką liczbą naturalną, że

$$500n < 2^n + 4000.$$

W celu przeprowadzenia zasadniczej części dowodu indukcyjnego chcemy wykazać, że z powyższej nierówności wynika nierówność

$$500(n+1) < 2^{n+1} + 4000.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności i korzystając z założenia indukcyjnego oraz z nierówności $n \geq 9$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} L &= 500(n+1) = 500n + 500 < 2^n + 4000 + 500 < 2^n + 4000 + 512 = 2^n + 4000 + 2^9 \leq \\ &\leq 2^n + 4000 + 2^n = 2^{n+1} + 4000 = P, \end{aligned}$$

co kończy dowód indukcyjny.

Zadanie **2** (10 punktów)

Udowodnij, że liczba $\log_{(20/27)}\left(\frac{2\cdot\sqrt[4]{5}}{3}\right)$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_{(20/27)}\left(\frac{2\cdot\sqrt[4]{5}}{3}\right)$ jest wymierna i niech będzie ona równa m/n , gdzie m, n są liczbami naturalnymi (**zauważmy, że jest to liczba dodatnia, bo podstawa logarytmu jest mniejsza od 1, a liczba logarytmowana jako równa $\sqrt[4]{80/81}$ też jest mniejsza od 1**). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned}\log_{(20/27)}\left(\frac{2\cdot\sqrt[4]{5}}{3}\right) &= \frac{m}{n}, \\ \left(\frac{20}{27}\right)^{m/n} &= \frac{2\cdot\sqrt[4]{5}}{3}, \\ \left(\frac{20}{27}\right)^m &= \left(\frac{2\cdot\sqrt[4]{5}}{3}\right)^n, \\ 20^m\cdot 3^n &= \left(2\cdot\sqrt[4]{5}\right)^n\cdot 27^m, \\ 20^{4m}\cdot 3^{4n} &= 80^n\cdot 27^{4m}.\end{aligned}$$

Wykażemy, że powyższe równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych m, n .

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy $2^{8m}\cdot 3^{4n}\cdot 5^{4m} = 2^{4n}\cdot 3^{12m}\cdot 5^n$.

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 8m &= 4n \\ 4n &= 12m \\ 4m &= n \end{cases}$$

Jednak powyższy układ równań nie ma rozwiązania w liczbach dodatnich m, n , gdyż dla takiego rozwiązania mielibyśmy

$$8m = 4n = 12m,$$

czyli $8m = 12m$, co nie jest prawdą dla dodatniej liczby m .

Inne rozumowanie: rozwiązujemy układ równań i stwierdzamy, że jedyne rozwiązanie rzeczywiste $m = n = 0$ nie jest rozwiązaniem w liczbach naturalnych.

Doszliśmy do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{(20/27)}\left(\frac{2\cdot\sqrt[4]{5}}{3}\right)$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{(20/27)}\left(\frac{2\cdot\sqrt[4]{5}}{3}\right)$ jest niewymierna.

Uwaga: Ponieważ korzystamy z jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze liczb naturalnych, **błędne** jest każde rozwiązanie oparte na rozkładzie, w którym:

- zamiast rozkładu na czynniki pierwsze występuje rozkład z potęgami liczb złożonych lub
- występują wykładniki, o których nie wiadomo, że są całkowite i nieujemne lub
- bez powodu przyjęto, że liczba w treści zadania jest ujemna i zapisano ją w postaci $-m/n$.

Zgodnie z ogólną zasadą, częściowa punktacja za błędne rozwiązanie musi być niższa niż **50%**, a zatem takie rozwiązania nie mogą być ocenione na więcej niż **4 punkty**. Jednak sprawdzający ma prawo uznać powyższe błędy za dyskwalifikujące i dawać za takie rozwiązania **0 punktów**. A może dawać **4 punkty** lub cokolwiek między 0 a 4 – to jego suwerenna decyzja, której nikt nie powinien podważać.

Zadanie 3 (10 punktów)

Jakie największe pole może mieć trójkąt jak na rysunku obok? Dwa wierzchołki to $(0, 0)$ i $(1, 1)$, a trzeci wierzchołek leży na fragmencie krzywej o równaniu $y = x^3$ odpowiadającym $x \in (0, 1)$.

Wskazówka: Można bez dowodu skorzystać ze wzoru na pole trójkąta o wierzchołkach $(0, 0)$, $(1, 1)$ i (a, b) : $\text{POLE} = \frac{|a-b|}{2}$.

Rozwiązanie:

Niech (a, a^3) , gdzie $a \in (0, 1)$, będzie wierzchołkiem trójkąta leżącym na krzywej.

Wówczas pole trójkąta jest równe $P(a) = \frac{a-a^3}{2}$.

Zauważmy, że

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} P(a) = \lim_{a \rightarrow 1^-} P(a) = 0,$$

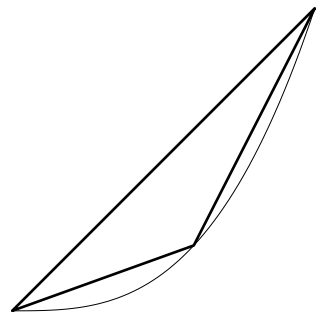
a ponadto

$$P'(a) = \frac{1-3a^2}{2}.$$

Wobec tego $P'(a) = 0$ dla $a = 1/\sqrt{3}$, co prowadzi do maksymalnej wartości pola trójkąta równej

$$P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}}}{2} = \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Odpowiedź: Największe możliwe pole trójkąta wynosi $\frac{1}{3\sqrt{3}}$.



Zadanie **4** (10 punktów)

Dana jest funkcja $f : (2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \sqrt[6]{x^6 - 63}.$$

Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych $x, y > 2$ zachodzą nierówności

$$|x - y| \leqslant |f(x) - f(y)| \leqslant 32 \cdot |x - y|.$$

Rozwiązanie:

Dla $x = y$ dowiedzona nierówność jest oczywista, natomiast przy $x \neq y$ z twierdzenia Lagrange’a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)| \cdot |x - y|,$$

gdzie c jest pewną liczbą leżącą między x i y .

Rozwiązanie zadania będzie zakończone, jeśli wykazemy, że dla każdej liczby rzeczywistej $x > 2$ zachodzą nierówności

$$1 \leqslant |f'(x)| \leqslant 32.$$

Ponieważ

$$f'(x) = \frac{6 \cdot x^5}{6 \cdot (x^6 - 63)^{5/6}} = \frac{x^5}{(x^6 - 63)^{5/6}},$$

dla zakończenia rozwiązania wystarczy przeprowadzić poniższe oszacowania prawdziwe dla $x > 2$:

$$|f'(x)| = \frac{x^5}{(x^6 - 63)^{5/6}} > \frac{x^5}{(x^6)^{5/6}} = \frac{x^5}{x^5} = 1$$

oraz

$$|f'(x)| = \frac{x^5}{(x^6 - 63)^{5/6}} < \frac{x^5}{\left(x^6 - 63 \cdot \frac{x^6}{64}\right)^{5/6}} = \frac{x^5}{\left(\frac{64 \cdot x^6 - 63 \cdot x^6}{64}\right)^{5/6}} = \frac{x^5}{\left(\frac{x^6}{64}\right)^{5/6}} = 32. \qquad \frac{x^6}{64} > 1$$

Zadanie **5** (10 punktów)

Oblicz sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(10n-9)(10n+1)}.$$

Rozwiązanie:

Szukamy takich liczb A i B , że

$$\frac{1}{(10n-9)(10n+1)} = \frac{A}{10n-9} + \frac{B}{10n+1}.$$

Po wymnożeniu prawej równości stronami przez $(10n-9)(10n+1)$ otrzymujemy

$$1 = A(10n+1) + B(10n-9). \tag{*}$$

Dla $n = 9/10$ otrzymujemy $A = 1/10$, natomiast przyjęcie $n = -1/10$ daje $B = -1/10$.

Inny sposób: porównując w równaniu (*) współczynniki przy n oraz wyrazy wolne dostajemy układ równań i go rozwiązujemy.

Zatem N -ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{(10n-9)(10n+1)} = \frac{1}{10} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{10n-9} - \frac{1}{10n+1} \right) = \\ &= \frac{1}{10} \left(\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{11} \right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{21} \right) + \left(\frac{1}{21} - \frac{1}{31} \right) + \left(\frac{1}{31} - \frac{1}{41} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \left(\frac{1}{10N-29} - \frac{1}{10N-19} \right) + \left(\frac{1}{10N-19} - \frac{1}{10N-9} \right) + \left(\frac{1}{10N-9} - \frac{1}{10N+1} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{10} \left(1 - \frac{1}{10N+1} \right), \end{aligned}$$

co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do $1/10$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą $1/10$.

Zadanie 6 (10 punktów, a może więcej)

Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej $x \in (1, 81)$ zachodzą nierówności

$$\frac{x+39}{40} < \sqrt[4]{x} \leq \frac{x+48}{32}.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ funkcja f określona wzorem $f(x) = \sqrt[4]{x}$ jest ściśle wklęsła, jej wykres leży powyżej każdej cięciwy¹ oraz poniżej każdej stycznej².

Ponieważ cięciwa wykresu o końcach odpowiadających $x=1$ i $x=81$ ma równanie

$$y = f(1) + \frac{f(81) - f(1)}{81 - 1} \cdot (x - 1) = 1 + \frac{3 - 1}{80} \cdot (x - 1) = 1 + \frac{1}{40} \cdot (x - 1) = \frac{x + 39}{40},$$

spełniona jest lewa nierówność z treści zadania.

Ponadto styczna do wykresu w punkcie odpowiadającym $x=16$ ma równanie

$$y = f(16) + f'(16) \cdot (x - 16) = 2 + \frac{x - 16}{32} = \frac{x + 48}{32},$$

co dowodzi prawej nierówności z treści zadania.

Skorzystaliśmy tu z równości

$$f'(x) = \frac{1}{4 \cdot x^{3/4}}$$

prowadzącej do $f'(16) = 1/32$.

¹Nie licząc końców cięciwy, które leżą na wykresie.

²Za wyjątkiem punktu styczności, który leży na wykresie.

Zadanie **7** (ZADANIE DODATKOWE)

Wskaż odpowiednią liczbę naturalną n i udowodnij dla niej nierówności

$$2^{15n} < n^{2^{75}} < 2^{16n}.$$

Rozwiązanie:

Ślepa uliczka

Przyjmijmy $n = 2^k$. Wówczas podane nierówności przybierają postać

$$2^{15 \cdot 2^k} < 2^{k \cdot 2^{75}} < 2^{16 \cdot 2^k},$$

czyli kolejno

$$15 \cdot 2^k < k \cdot 2^{75} < 16 \cdot 2^k,$$

$$15 \cdot 2^{k-75} < k < 16 \cdot 2^{k-75}. \tag{♡}$$

Jednak nie udaje się dobrać³ liczby naturalnej k , która spełniałaby nierówności (♡).

Rozwiązanie poprawne

Przyjmijmy $n = k \cdot 2^{75}$. Wtedy podane nierówności przybierają postać

$$2^{15k \cdot 2^{75}} < (k \cdot 2^{75})^{2^{75}} < 2^{16k \cdot 2^{75}},$$

czyli

$$(2^{15k})^{2^{75}} < (k \cdot 2^{75})^{2^{75}} < (2^{16k})^{2^{75}},$$

co jest równoważne nierównościom

$$2^{15k} < k \cdot 2^{75} < 2^{16k}. \tag{♣}$$

Zauważmy⁴, że nierówności (♣) są prawdziwe dla $k = 5$, gdyż wówczas

$$2^{15k} = 2^{75} < 5 \cdot 2^{75} = k \cdot 2^{75} < 32 \cdot 2^{75} = 2^5 \cdot 2^{75} = 2^{80} = 2^{16k}.$$

Odpowiedź: Liczbą spełniającą podane nierówności jest $n = 5 \cdot 2^{75}$.

³Liczba $k = 77$ jest za mała, a $k = 78$ za duża.

⁴Porównanie wykładników sugeruje wypróbować takie k , aby $15k \approx 75 \approx 16k$.