

Zadanie 1 (10 punktów)

Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$500n < 2^n + 4000.$$

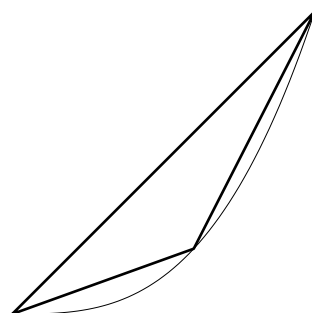
Zadanie 2 (10 punktów)

Udowodnij, że liczba $\log_{(20/27)} \left(\frac{2 \cdot \sqrt[4]{5}}{3} \right)$ jest niewymierna.

Zadanie 3 (10 punktów)

Jakie największe pole może mieć trójkąt jak na rysunku obok? Dwa wierzchołki to $(0, 0)$ i $(1, 1)$, a trzeci wierzchołek leży na fragmencie krzywej o równaniu $y = x^3$ odpowiadającym $x \in (0, 1)$.

Wskazówka: Można bez dowodu skorzystać ze wzoru na pole trójkąta o wierzchołkach $(0, 0)$, $(1, 1)$ i (a, b) : $\text{POLE} = \frac{|a-b|}{2}$.



Zadanie 4 (10 punktów)

Dana jest funkcja $f: (2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \sqrt[6]{x^6 - 63}.$$

Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych $x, y > 2$ zachodzą nierówności

$$|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq 32 \cdot |x - y|.$$

Zadanie 5 (10 punktów)

Oblicz sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(10n-9)(10n+1)}.$$

Zadanie 6 (10 punktów, a może więcej)

Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej $x \in (1, 81)$ zachodzą nierówności

$$\frac{x+39}{40} < \sqrt[4]{x} \leq \frac{x+48}{32}.$$

Zadanie 7 (ZADANIE DODATKOWE)

Wskaż odpowiednią liczbę naturalną n i udowodnij dla niej nierówności

$$2^{15n} < n^{2^{75}} < 2^{16n}.$$