

ANALIZA 1

16 lutego 2026 r., godz. 11:20–13:20

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadanie 13 to zadanie dodatkowe.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Z ułamków nie trzeba wyłączać części całkowitej:
np. wystarczy podać $\frac{77}{3}$, ale $25\frac{2}{3}$ też będzie uznane.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry

NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

1. Dla podanej liczby k podaj liczbę naturalną $n > k$ spełniającą równanie

$$9 \cdot \binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}.$$

a) $k = 6, \quad n = \mathbf{69}$

b) $k = 7, \quad n = \mathbf{79}$

c) $k = 10, \quad n = \mathbf{109}$

d) $k = 20, \quad n = \mathbf{209}$

2. Niech $G(a, b) = \sup \left\{ \frac{mn}{am^2 + bn^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$. Wtedy:

a) $G(12, 75) = \mathbf{1/60}$

b) $G(12, 27) = \mathbf{1/36}$

c) $G(3, 75) = \mathbf{1/30}$

d) $G(3, 27) = \mathbf{1/18}$

3. Podaj kres dolny zbioru.

a) $\inf \{x^2 + 12x : x \in (-10, 10)\} = \mathbf{-36}$

b) $\inf \{x^2 + 10x : x \in (-10, 10)\} = \mathbf{-25}$

c) $\inf \{x^2 + 12y : x, y \in (-10, 10)\} = \mathbf{-120}$

d) $\inf \{x^2 + 10y : x, y \in (-10, 10)\} = \mathbf{-100}$

4. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2n+1}^{4n} \frac{kn^6}{\sqrt{36n^{16} + k}} = \mathbf{1}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{7n} \frac{kn^6}{\sqrt{36n^{16} + k}} = \mathbf{4}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2n+1}^{8n} \frac{kn^6}{\sqrt{36n^{16} + k}} = \mathbf{5}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{5n} \frac{kn^6}{\sqrt{36n^{16} + k}} = \mathbf{2}$

5. Podaj liczbę podzbiorów A zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ spełniających warunki $\forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (n+3) \in A)$ oraz

a) $3, 5, 7 \in A \quad \mathbf{6}$

b) $5, 7, 9 \in A \quad \mathbf{18}$

c) $4, 6, 8 \in A \quad \mathbf{12}$

d) $6, 8, 10 \in A \quad \mathbf{24}$

6. Niech $f(x) = x^2 - 2x$. Podaj przeciwobrazy przedziałów **otwartych**.

a) $f^{-1}[(0, 3)] = (-1, 0) \cup (2, 3)$ b) $f^{-1}[(3, 8)] = (-2, -1) \cup (3, 4)$

c) $f^{-1}[(-1, 15)] = (-3, 1) \cup (1, 5)$ d) $f^{-1}[(24, 48)] = (-6, -4) \cup (6, 8)$

7. Niech $f_n(x) = \sqrt[3]{x^n}$. Podaj wzór na pochodną trzeciego rzędu.

a) $f_5'''(x) = -\frac{10}{27x^{4/3}}$ b) $f_4'''(x) = -\frac{8}{27x^{5/3}}$

c) $f_2'''(x) = \frac{8}{27x^{7/3}}$ d) $f_1'''(x) = \frac{10}{27x^{8/3}}$

8. Niech $f(x) = \sin(2x)$. Podaj wzór na pochodną danego rzędu.

a) $f^{(2025)}(x) = 2^{2025} \cdot \cos(2x)$ b) $f^{(2024)}(x) = 2^{2024} \cdot \sin(2x)$

c) $f^{(2027)}(x) = -2^{2027} \cdot \cos(2x)$ d) $f^{(2026)}(x) = -2^{2026} \cdot \sin(2x)$

9. Niech a_k i b_k będą takimi liczbami, że prosta o równaniu $y = a_k x + b_k$ jest styczna w punkcie (k, k^3) do krzywej o równaniu $y = x^3$. Wówczas:

a) $a_{-2} = 12$ $b_{-2} = 16$ b) $a_1 = 3$ $b_1 = -2$

c) $a_2 = 12$ $b_2 = -16$ d) $a_{-1} = 3$ $b_{-1} = 2$

10. Niech g będzie funkcją odwrotną do funkcji $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1$. Podaj wartość pochodnej.

a) $g'(3) = 1$ b) $g'(13) = 27/7$

c) $g'(7) = 12/5$ d) $g'(31) = 75/11$

11. Podaj sumę szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^{2025}}{10^n} = -1/11$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2026^n}}{10^n} = 1/9$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^{2026}}{10^n} = -1/11$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2025^n}}{10^n} = -1/9$

12. Podaj sumę szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{3n+3} \right) = 8 - e^3$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n+1} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{3n+4} \right) = 16 - e^3$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n+2} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{3n+5} \right) = 32 - e^3$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n+3} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{3n+6} \right) = 64 - e^3$

13. Dla podanej liczby A podaj przykład liczby rzeczywistej dodatniej $x \neq 1$, dla której liczba $\log_x(x+A)$ jest liczbą wymierną **niecałkowitą**. W podanych przykładach liczbę x należy wyrazić wzorem, w którym można używać liczb całkowitych, czterech działań oraz pierwiastkowania kwadratowego. W każdym z przykładów podaj także wartość $w = \log_x(x+A)$.

a) $A = 120\sqrt{5}, \quad x = 5\sqrt{5}, \quad w = 7/3$

b) $A = 120\sqrt{2}, \quad x = 8\sqrt{2}, \quad w = 15/7$

c) $A = 24\sqrt{3}, \quad x = 3\sqrt{3}, \quad w = 7/3$

d) $A = 24\sqrt{2}, \quad x = 8\sqrt{2}, \quad w = 11/7$