

ANALIZA 1

16 lutego 2026 r., godz. 11:20–13:20

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadanie 13 to zadanie dodatkowe.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Z ułamków nie trzeba wyłączać części całkowitej:
np. wystarczy podać $\frac{77}{3}$, ale $25\frac{2}{3}$ też będzie uznane.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry

NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

1. Dla podanej liczby k podaj liczbę naturalną $n > k$ spełniającą równanie

$$9 \cdot \binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}.$$

a) $k = 6, \quad n = \dots\dots\dots$ b) $k = 7, \quad n = \dots\dots\dots$

c) $k = 10, \quad n = \dots\dots\dots$ d) $k = 20, \quad n = \dots\dots\dots$

2. Niech $G(a, b) = \sup \left\{ \frac{mn}{am^2 + bn^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$. Wtedy:

a) $G(12, 75) = \dots\dots\dots$ b) $G(12, 27) = \dots\dots\dots$

c) $G(3, 75) = \dots\dots\dots$ d) $G(3, 27) = \dots\dots\dots$

3. Podaj kres dolny zbioru.

a) $\inf \{x^2 + 12x : x \in (-10, 10)\} = \dots\dots\dots$

b) $\inf \{x^2 + 10x : x \in (-10, 10)\} = \dots\dots\dots$

c) $\inf \{x^2 + 12y : x, y \in (-10, 10)\} = \dots\dots\dots$

d) $\inf \{x^2 + 10y : x, y \in (-10, 10)\} = \dots\dots\dots$

4. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2n+1}^{4n} \frac{kn^6}{\sqrt{36n^{16} + k}} = \dots\dots\dots$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{7n} \frac{kn^6}{\sqrt{36n^{16} + k}} = \dots\dots\dots$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2n+1}^{8n} \frac{kn^6}{\sqrt{36n^{16} + k}} = \dots\dots\dots$ d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{5n} \frac{kn^6}{\sqrt{36n^{16} + k}} = \dots\dots\dots$

5. Podaj liczbę podzbiorów A zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ spełniających warunki $\forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (n+3) \in A)$ oraz

a) $3, 5, 7 \in A \quad \dots\dots\dots$ b) $5, 7, 9 \in A \quad \dots\dots\dots$

c) $4, 6, 8 \in A \quad \dots\dots\dots$ d) $6, 8, 10 \in A \quad \dots\dots\dots$

6. Niech $f(x) = x^2 - 2x$. Podaj przeciwobrazy przedziałów **otwartych**.

a) $f^{-1}[(0, 3)] = \dots\dots\dots$ b) $f^{-1}[(3, 8)] = \dots\dots\dots$

c) $f^{-1}[(-1, 15)] = \dots\dots\dots$ d) $f^{-1}[(24, 48)] = \dots\dots\dots$

7. Niech $f_n(x) = \sqrt[3]{x^n}$. Podaj wzór na pochodną trzeciego rzędu.

a) $f_5'''(x) = \dots\dots\dots$ b) $f_4'''(x) = \dots\dots\dots$

c) $f_2'''(x) = \dots\dots\dots$ d) $f_1'''(x) = \dots\dots\dots$

8. Niech $f(x) = \sin(2x)$. Podaj wzór na pochodną danego rzędu.

a) $f^{(2025)}(x) = \dots\dots\dots$ b) $f^{(2024)}(x) = \dots\dots\dots$

c) $f^{(2027)}(x) = \dots\dots\dots$ d) $f^{(2026)}(x) = \dots\dots\dots$

9. Niech a_k i b_k będą takimi liczbami, że prosta o równaniu $y = a_k x + b_k$ jest styczna w punkcie (k, k^3) do krzywej o równaniu $y = x^3$. Wówczas:

a) $a_{-2} = \dots\dots\dots$ $b_{-2} = \dots\dots\dots$ b) $a_1 = \dots\dots\dots$ $b_1 = \dots\dots\dots$

c) $a_2 = \dots\dots\dots$ $b_2 = \dots\dots\dots$ d) $a_{-1} = \dots\dots\dots$ $b_{-1} = \dots\dots\dots$

10. Niech g będzie funkcją odwrotną do funkcji $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1$. Podaj wartość pochodnej.

a) $g'(3) = \dots\dots\dots$ b) $g'(13) = \dots\dots\dots$

c) $g'(7) = \dots\dots\dots$ d) $g'(31) = \dots\dots\dots$

11. Podaj sumę szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^{2025}}{10^n} = \dots\dots\dots$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2026^n}}{10^n} = \dots\dots\dots$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^{2026}}{10^n} = \dots\dots\dots$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2025^n}}{10^n} = \dots\dots\dots$

12. Podaj sumę szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{3n+3} \right) = \dots\dots\dots$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n+1} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{3n+4} \right) = \dots\dots\dots$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n+2} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{3n+5} \right) = \dots\dots\dots$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n+3} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{3n+6} \right) = \dots\dots\dots$

13. Dla podanej liczby A podaj przykład liczby rzeczywistej dodatniej $x \neq 1$, dla której liczba $\log_x(x+A)$ jest liczbą wymierną **niecałkowitą**. W podanych przykładach liczbę x należy wyrazić wzorem, w którym można używać liczb całkowitych, czterech działań oraz pierwiastkowania kwadratowego. W każdym z przykładów podaj także wartość $w = \log_x(x+A)$.

a) $A = 120\sqrt{5}$, $x = \dots\dots\dots$, $w = \dots\dots\dots$

b) $A = 120\sqrt{2}$, $x = \dots\dots\dots$, $w = \dots\dots\dots$

c) $A = 24\sqrt{3}$, $x = \dots\dots\dots$, $w = \dots\dots\dots$

d) $A = 24\sqrt{2}$, $x = \dots\dots\dots$, $w = \dots\dots\dots$