

ANALIZA 1

9 października 2025 r., godz. 8:15–9:45

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadania 11 i 12 to zadania dodatkowe.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Z ułamków nie trzeba wyłączać części całkowitej:
np. wystarczy podać $\frac{77}{3}$, ale $25\frac{2}{3}$ też będzie uznane.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry

NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

1. Dla danej liczby n podaj **dwucyfrową liczbę pierwszą** p będącą dzielnikiem liczby n .

a) $n = 67^{113} - 24^{113}$, $p = \dots\dots\dots$ b) $n = 59^{142} - 10^{142}$, $p = \dots\dots\dots$

c) $n = 51^{135} + 32^{135}$, $p = \dots\dots\dots$ d) $n = 36^{178} - 11^{178}$, $p = \dots\dots\dots$

2. Dla danej liczby k podaj taką liczbę naturalną $n > k$, aby w każdym postępie arytmetycznym $a_1, a_2, \dots, a_n$ zachodziła równość $\sum_{i=1}^n a_i = n \cdot a_k$.

a) $k = 50$, $n = \dots\dots\dots$ b) $k = 33$, $n = \dots\dots\dots$

c) $k = 10$, $n = \dots\dots\dots$ d) $k = 4$, $n = \dots\dots\dots$

3. Dla podanej liczby n podaj liczbę naturalną $k < n$ spełniającą równanie

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k+7}.$$

a) $n = 19$, $k = \dots\dots\dots$ b) $n = 17$, $k = \dots\dots\dots$

c) $n = 27$, $k = \dots\dots\dots$ d) $n = 21$, $k = \dots\dots\dots$

4. Dla podanej liczby k podaj liczbę naturalną $n > k$ spełniającą równanie

$$2 \cdot \binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}.$$

a) $k = 33$, $n = \dots\dots\dots$ b) $k = 2$, $n = \dots\dots\dots$

c) $k = 5$, $n = \dots\dots\dots$ d) $k = 10$, $n = \dots\dots\dots$

5. Dla danej liczby n podaj **trzycyfrową** liczbę d będącą dzielnikiem liczby n .

a) $n = 999\,991$, $d = \dots\dots\dots$ b) $n = 1\,000\,001$, $d = \dots\dots\dots$

c) $n = 1\,030\,301$, $d = \dots\dots\dots$ d) $n = 8\,000\,027$, $d = \dots\dots\dots$

6. Podaj rozwiązanie danego równania.

a) $\log_4 5 = \log_2 x$, $x = \dots\dots\dots$ b) $\log_3 4 = \log_{27} x$, $x = \dots\dots\dots$

c) $\log_9 25 = \log_{27} x$, $x = \dots\dots\dots$ d) $\log_2 3 = \log_4 x$, $x = \dots\dots\dots$

7. Niech $F(x, y) = \log_2 \log_5 x - \log_2 \log_5 y$. Podaj w postaci uproszczonej.

a) $F(9, \sqrt[8]{3}) = \dots\dots\dots$ b) $F(81, 3) = \dots\dots\dots$

c) $F(9, \sqrt[4]{3}) = \dots\dots\dots$ d) $F(81, \sqrt[32]{3}) = \dots\dots\dots$

8. Niech $P(k, n) = \prod_{i=k}^n \log_i(i+1)$. Podaj w postaci uproszczonej.

a) $P(27, 80) = \dots\dots\dots$ b) $P(3, 8) = \dots\dots\dots$

c) $P(8, 15) = \dots\dots\dots$ d) $P(4, 31) = \dots\dots\dots$

9. Postęp geometryczny $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ o wyrazach rzeczywistych dodatnich jest rosnący, a ponadto ma następującą własność: *Wyrazy pierwszy, szósty i dziesiąty tworzą (w tej właśnie kolejności) trójwyrazowy postęp arytmetyczny.* Dla podanego m podaj takie liczby całkowite dodatnie n i k , aby wyrazy a_m, a_n i a_k tworzyły (w tej właśnie kolejności) rosnący trójwyrazowy postęp arytmetyczny.

a) $m=2, \quad n= \dots\dots, \quad k= \dots\dots$ b) $m=6, \quad n= \dots\dots, \quad k= \dots\dots$

c) $m=10, \quad n= \dots\dots, \quad k= \dots\dots$ d) $m=60, \quad n= \dots\dots, \quad k= \dots\dots$

10. Dla podanych A i B podaj liczbę rzeczywistą x spełniającą równanie
$$A^{B^x} = B^{A^x}.$$

a) $A=3, \quad B=27, \quad x= \dots\dots\dots$ b) $A=4, \quad B=16, \quad x= \dots\dots\dots$

c) $A=2, \quad B=16, \quad x= \dots\dots\dots$ d) $A=2, \quad B=4, \quad x= \dots\dots\dots$

11. To samo polecenie, co w zadaniu poprzednim.

a) $A=\sqrt{2}, \quad B=4, \quad x= \dots\dots\dots$ b) $A=\sqrt{2}, \quad B=2, \quad x= \dots\dots\dots$

c) $A=\sqrt{2}, \quad B=256, \quad x= \dots\dots\dots$ d) $A=\sqrt{2}, \quad B=16, \quad x= \dots\dots\dots$

12. Dla podanych a i b podaj liczbę rzeczywistą $x > 1$ spełniającą równanie
$$\log_a x + \log_b x = \log_a x \cdot \log_b x.$$

a) $a=7, \quad b=11, \quad x= \dots\dots\dots$ b) $a=4, \quad b=9, \quad x= \dots\dots\dots$

c) $a=3, \quad b=5, \quad x= \dots\dots\dots$ d) $a=5, \quad b=7, \quad x= \dots\dots\dots$