

KOŁOKWIUM nr **2**, **23.10.2025**, godz. 8:15–9:45

Zadanie **1.** (10 punktów)

Udowodnij, że liczba $\log_{(21/20)}\left(\frac{10}{21}\right)$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_{(21/20)}\left(\frac{10}{21}\right)$ jest wymierna i niech będzie ona równa $-m/n$, gdzie m, n są liczbami naturalnymi (**zauważmy, że jest to liczba ujemna, bo podstawa logarytmu jest większa od 1, a liczba logarytmowana jest mniejsza od 1**). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned}\log_{(21/20)}\left(\frac{10}{21}\right) &= -\frac{m}{n}, \\ \left(\frac{21}{20}\right)^{-m/n} &= \frac{10}{21}, \\ \left(\frac{21}{20}\right)^{-m} &= \left(\frac{10}{21}\right)^n, \\ \left(\frac{20}{21}\right)^m &= \left(\frac{10}{21}\right)^n, \\ 20^m \cdot 21^n &= 10^n \cdot 21^m.\end{aligned}$$

Wykażemy, że powyższe równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych m, n .

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy

$$2^{2m} \cdot 3^n \cdot 5^m \cdot 7^n = 2^n \cdot 3^m \cdot 5^n \cdot 7^m.$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 2m &= n \\ n &= m \\ m &= n \\ n &= m \end{cases}$$

Jednak powyższy układ równań nie ma rozwiązania w liczbach dodatnich m, n , gdyż dla takiego rozwiązania mielibyśmy

$$2m = n = m,$$

czyli $2m = m$, co nie jest prawdą dla dodatniej liczby m .

Inne rozumowanie: rozwiązujemy układ równań i stwierdzamy, że jedyne rozwiązanie rzeczywiste $m = n = 0$ nie jest rozwiązaniem w liczbach naturalnych.

Doszliśmy do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{(21/20)}\left(\frac{10}{21}\right)$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{(21/20)}\left(\frac{10}{21}\right)$ jest niewymierna.

Uwaga: Ponieważ korzystamy z jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze liczb naturalnych, **błędne** jest każde rozwiązanie oparte na rozkładzie, w którym:

- zamiast rozkładu na czynniki pierwsze występuje rozkład z potęgami liczb złożonych lub
- występują wykładniki, o których nie wiadomo, że są całkowite i nieujemne lub
- nie zauważono, że liczba w treści zadania jest ujemna i zapisano ją w postaci ułamka o dodatnim liczniku i mianowniku.

Zgodnie z ogólną zasadą, częściowa punktacja za błędne rozwiązanie musi być niższa niż **50%**, a zatem takie rozwiązania nie mogą być ocenione na więcej niż **4 punkty**. Jednak sprawdzający ma prawo uznać powyższe błędy za dyskwalifikujące i dawać za takie rozwiązania **0 punktów**. A może dawać **4 punkty** lub cokolwiek między 0 a 4 – to jego suwerenna decyzja, której nikt nie powinien podważać.

Zadanie **2.** (10 punktów)

Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$16^n \cdot \binom{3n}{n} < 27^n \cdot \binom{2n}{n}.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

Dla $n = 1$ mamy $16^n \cdot \binom{3n}{n} = 16 \cdot 3 = 48$ oraz $27^n \cdot \binom{2n}{n} = 27 \cdot 2 = 54$, a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $48 < 54$, jest więc prawdziwa.

Zanim przystąpimy do dalszej części rozwiązania, przepisemy dowodzoną nierówność w prostszej postaci:

$$\begin{aligned} 16^n \cdot \frac{(3n)!}{n! \cdot (2n)!} &< 27^n \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2}, \\ \frac{(3n)! \cdot n!}{((2n)!)^2} &< \left(\frac{27}{16}\right)^n. \end{aligned}$$

Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$\frac{(3n)! \cdot n!}{((2n)!)^2} < \left(\frac{27}{16}\right)^n.$$

Chcemy wykazać, że wówczas

$$\frac{(3n+3)! \cdot (n+1)!}{((2n+2)!)^2} < \left(\frac{27}{16}\right)^{n+1}.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności i korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$\begin{aligned} L &= \frac{(3n+3)! \cdot (n+1)!}{((2n+2)!)^2} = \frac{(3n)! \cdot (3n+1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+3) \cdot n! \cdot (n+1)}{((2n)!)^2 \cdot (2n+1)^2 \cdot (2n+2)^2} = \\ &= \frac{(3n)! \cdot n!}{((2n)!)^2} \cdot \frac{(3n+1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+3) \cdot (n+1)}{(2n+1)^2 \cdot (2n+2)^2} < \left(\frac{27}{16}\right)^n \cdot \frac{(3n+1) \cdot (3n+2) \cdot 3}{(2n+1)^2 \cdot 4} \leqslant \\ &\leqslant \left(\frac{27}{16}\right)^n \cdot \frac{27}{16} = \left(\frac{27}{16}\right)^{n+1} = P, \end{aligned}$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{3 \cdot (3n+1) \cdot (3n+2)}{4 \cdot (2n+1)^2} \leqslant \frac{27}{16},$$

czyli

$$4 \cdot (3n+1) \cdot (3n+2) \leqslant 9 \cdot (2n+1)^2.$$

Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom

$$\begin{aligned} 4 \cdot (9n^2 + 9n + 2) &\leqslant 9 \cdot (4n^2 + 4n + 1), \\ 36n^2 + 36n + 8 &\leqslant 36n^2 + 36n + 9, \\ 8 &\leqslant 9, \end{aligned}$$

a więc jest ona prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n .

Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej n .

Uwaga: Nierówność

$$4 \cdot (3n + 1) \cdot (3n + 2) \leqslant 9 \cdot (2n + 1)^2$$

może być przepisana w postaci

$$\left(n + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(n + \frac{2}{3}\right) \leqslant \left(n + \frac{1}{2}\right)^2,$$

czyli

$$\sqrt{\left(n + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(n + \frac{2}{3}\right)} \leqslant n + \frac{1}{2},$$

a to jest prawdziwe jako nierówność między średnimi geometryczną i arytmetyczną liczb $n + \frac{1}{3}$ oraz $n + \frac{2}{3}$.

Zadanie 3. (10 punktów)

Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$1000n < 2^n + 9000.$$

Rozwiązanie:

Dowód nierówności podzielimy na dwa przypadki.

Przypadek pierwszy: $n \leq 9$.

Dla $n \leq 9$ zachodzą nierówności

$$1000n \leq 9000 < 2^n + 9000,$$

skąd wynika prawdziwość nierówności danej w zadaniu.

Przypadek drugi: $n \geq 10$.

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 10$ porównujemy lewą i prawą stronę nierówności danej w treści zadania:

$$L = 10\,000,$$

$$P = 2^{10} + 9000 = 10\,024,$$

skąd $L < P$.

2° Niech $n \geq 10$ będzie taką liczbą naturalną, że

$$1000n < 2^n + 9000.$$

W celu przeprowadzenia zasadniczej części dowodu indukcyjnego chcemy wykazać, że z powyższej nierówności wynika nierówność

$$1000 \cdot (n+1) < 2^{n+1} + 9000.$$

Wychodząc od lewej strony tej nierówności i korzystając z założenia indukcyjnego oraz z nierówności $n \geq 10$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} L &= 1000 \cdot (n+1) = 1000n + 1000 \leq 2^n + 9000 + 1000 < \\ &< 2^n + 9000 + 2^{10} \leq 2^n + 9000 + 2^n = 2^{n+1} + 9000 = P, \end{aligned}$$

co kończy dowód indukcyjny.

Zadanie **4.** (10 lub 18 punktów)

Podaj trzy (wersja podstawowa) lub pięć (wersja trudniejsza) przykładów liczb rzeczywistych dodatnich $x \neq 1$, dla których liczba

$$\log_x \left(x + \frac{2}{9} \right)$$

jest wymierna.

W podanych przykładach liczbę x należy wyrazić wzorem, w którym można używać liczb całkowitych, czterech działań oraz pierwiastkowania kwadratowego.

W każdym z przykładów podaj, wraz z odpowiednim uzasadnieniem, wartość $\log_x \left(x + \frac{2}{9} \right)$.

Rozwiązanie:

Przykład I (2 punkty):

Dla $x = \frac{7}{9}$ liczba $\log_x \left(x + \frac{2}{9} \right) = \log_x 1 = 0$ jest liczbą wymierną.

Przykład II (4 punkty):

Zakładając, że

$$\log_x \left(x + \frac{2}{9} \right) = w,$$

otrzymujemy równanie

$$x^w = x + \frac{2}{9}. \tag{\#}$$

Wybieramy taką wartość wymierną w , abyśmy umieli rozwiązać równanie $(\#)$ i liczymy na to, że znajdziemy rozwiązanie dodatnie. Dla $w = 2$ równanie $(\#)$ przybiera postać

$$x^2 = x + \frac{2}{9}.$$

Rozwiązujemy powyższe równanie kwadratowe¹ otrzymując

$$x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{6},$$

a ponieważ interesuje nas rozwiązanie dodatnie, przyjmujemy

$$x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{6}$$

i wówczas

$$\log_x \left(x + \frac{2}{9} \right) = \log_x x^2 = 2$$

jest liczbą wymierną.

Przykład III (4 punkty):

Postępujemy jak w przykładzie II przyjmując $w = -1$, co prowadzi nas do równania

$$x^{-1} = x + \frac{2}{9}$$

¹Standardowe rachunki są tu pominięte, ale na kolokwium powinny się znaleźć w rozwiązaniu.

mającego rozwiązanie dodatnie

$$x = -\frac{1}{9} + \frac{\sqrt{82}}{9}.$$

Wówczas

$$\log_x\left(x + \frac{2}{9}\right) = \log_x x^{-1} = -1$$

jest liczbą wymierną.

Przykłady IV i V (4+4=8 punktów):

Postępujemy jak w przykładzie II przyjmując $w = 1/2$, co prowadzi nas do równania

$$\sqrt{x} = x + \frac{2}{9}$$

mającego rozwiązania

$$x = \frac{1}{9} \qquad \text{oraz} \qquad x = \frac{4}{9}.$$

W obu przypadkach

$$\log_x\left(x + \frac{2}{9}\right) = \log_x \sqrt{x} = 1/2$$

jest liczbą wymierną.