

ANALIZA 1, KOŁOKWIUM nr **2**, **23.10.2025**, godz. 8:15–9:45

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOŁOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **1.** (10 punktów)

Udowodnij, że liczba $\log_{(21/20)}\left(\frac{10}{21}\right)$ jest niewymierna.

Zadanie **2.** (10 punktów)

Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$16^n \cdot \binom{3n}{n} < 27^n \cdot \binom{2n}{n}.$$

Zadanie **3.** (10 punktów)

Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$1000n < 2^n + 9000.$$

Zadanie **4.** (10 lub 18 punktów)

Podaj trzy (wersja podstawowa) lub pięć (wersja trudniejsza) przykładów liczb rzeczywistych dodatnich $x \neq 1$, dla których liczba

$$\log_x\left(x + \frac{2}{9}\right)$$

jest wymierna.

W podanych przykładach liczbę x należy wyrazić wzorem, w którym można używać liczb całkowitych, czterech działań oraz pierwiastkowania kwadratowego.

W każdym z przykładów podaj, wraz z odpowiednim uzasadnieniem, wartość $\log_x\left(x + \frac{2}{9}\right)$.