

ANALIZA 1

6 listopada 2025 r., godz. 8:15–9:45

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadania 11 i 12 to zadania dodatkowe.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Z ułamków nie trzeba wyłączać części całkowitej:
np. wystarczy podać $\frac{77}{3}$, ale $25\frac{2}{3}$ też będzie uznane.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry

NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

1. Dla podanej liczby k podaj liczbę naturalną $n > k$ spełniającą równanie

$$4 \cdot \binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}.$$

a) $k = 6, \quad n = \dots\dots\dots$

b) $k = 7, \quad n = \dots\dots\dots$

c) $k = 10, \quad n = \dots\dots\dots$

d) $k = 20, \quad n = \dots\dots\dots$

2. Dla podanej liczby k podaj liczbę naturalną $n > k$ spełniającą równanie

$$3 \cdot \binom{n}{k} = 2 \cdot \binom{n}{k+1}.$$

a) $k = 11, \quad n = \dots\dots\dots$

b) $k = 9, \quad n = \dots\dots\dots$

c) $k = 7, \quad n = \dots\dots\dots$

d) $k = 5, \quad n = \dots\dots\dots$

3. Podaj taką liczbę wymierną w , aby dana liczba była wymierna.

a) $\log_{24}(18 \cdot 27^w) \in \mathbb{Q}$ dla $w = \dots\dots\dots$

b) $\log_{24}(18 \cdot 16^w) \in \mathbb{Q}$ dla $w = \dots\dots\dots$

c) $\log_{24}(18 \cdot 81^w) \in \mathbb{Q}$ dla $w = \dots\dots\dots$

d) $\log_{24}(18 \cdot 64^w) \in \mathbb{Q}$ dla $w = \dots\dots\dots$

4. Podaj taką liczbę wymierną w , aby dana liczba była wymierna.

a) $\log_{72}(12 \cdot 81^w) \in \mathbb{Q}$ dla $w = \dots\dots\dots$

b) $\log_{72}(12 \cdot 27^w) \in \mathbb{Q}$ dla $w = \dots\dots\dots$

c) $\log_{72}(12 \cdot 32^w) \in \mathbb{Q}$ dla $w = \dots\dots\dots$

d) $\log_{72}(12 \cdot 64^w) \in \mathbb{Q}$ dla $w = \dots\dots\dots$

5. Podaj liczbę podzbiorów A zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ spełniających warunki $\forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (n+2) \in A)$ oraz

- a) $6, 11 \in A$ b) $7, 12 \in A$
 c) $8, 13 \in A$ d) $9, 14 \in A$

6. Podaj liczbę podzbiorów A zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ spełniających warunki $\forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (n+3) \in A)$ oraz

- a) $6, 7, 11 \in A$ b) $5, 6, 10 \in A$
 c) $4, 5, 9 \in A$ d) $3, 4, 8 \in A$

7. Podaj wartość granicy dla tak dobranego parametru k , aby granica ta była dodatnia i skończona.

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^{24} + kn^k} - n^8 \right) = \dots$ dla $k = \dots$
 b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^{24} + kn^k} - n^{12} \right) = \dots$ dla $k = \dots$
 c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[8]{n^{24} + kn^k} - n^3 \right) = \dots$ dla $k = \dots$
 d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[4]{n^{24} + kn^k} - n^6 \right) = \dots$ dla $k = \dots$

8. Podaj wartość granicy dla tak dobranego parametru k , aby granica ta była dodatnia i skończona.

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \left(\sqrt[6]{n^{48} + kn^{10}} - n^8 \right) = \dots$ dla $k = \dots$
 b) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \left(\sqrt{n^{48} + kn^{10}} - n^{24} \right) = \dots$ dla $k = \dots$
 c) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \left(\sqrt[3]{n^{48} + kn^{10}} - n^{16} \right) = \dots$ dla $k = \dots$
 d) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \left(\sqrt[4]{n^{48} + kn^{10}} - n^{12} \right) = \dots$ dla $k = \dots$

9. Niech $G(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+k+\dots+an}{1+2+3+\dots+k+\dots+bn}$. Wtedy

a) $G(3, 2) = \dots$ b) $G(4, 3) = \dots$ c) $G(2, 1) = \dots$ d) $G(3, 1) = \dots$

10. Niech $G(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2) + (n+4) + \dots + (n+2k) + \dots + an}{1+2+3+\dots+k+\dots+bn}$.

Wtedy

a) $G(7, 4) = \dots$ b) $G(5, 4) = \dots$ c) $G(5, 2) = \dots$ d) $G(3, 3) = \dots$

11. Dla podanych liczb A i B podaj takie liczby naturalne n, k , że

$$Bk \leq n \quad \text{oraz} \quad A \cdot \binom{n}{k} = \binom{n}{Bk}.$$

a) $A=3, B=4, n = \dots, k = \dots$

b) $A=2, B=3, n = \dots, k = \dots$

c) $A=5, B=6, n = \dots, k = \dots$

d) $A=4, B=5, n = \dots, k = \dots$

12. Dla podanej liczby A podaj przykład liczby rzeczywistej dodatniej $x \neq 1$, dla której liczba $\log_x(x+A)$ jest liczbą wymierną **różną od -1 i 2** . W podanych przykładach liczbę x należy wyrazić wzorem, w którym można używać liczb całkowitych, czterech działań oraz pierwiastkowania kwadratowego. W każdym z przykładów podaj także wartość $w = \log_x(x+A)$.

a) $A=8\sqrt{3}, x = \dots, w = \dots$

b) $A=\sqrt{2}, x = \dots, w = \dots$

c) $A=3\sqrt{2}, x = \dots, w = \dots$

d) $A=2\sqrt{3}, x = \dots, w = \dots$