

KOŁOKWIUM nr 4, 20.11.2025, godz. 8:15–9:45

Zadanie 5. (10 punktów)
Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+5)^2} + \frac{\sqrt{n^2+7}}{(n+5)^2+2} + \frac{\sqrt{n^2+14}}{(n+5)^2+4} + \frac{\sqrt{n^2+21}}{(n+5)^2+6} + \frac{\sqrt{n^2+28}}{(n+5)^2+8} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\sqrt{n^2+7k}}{(n+5)^2+2k} + \dots + \frac{\sqrt{(n+A)^2-21}}{(n+B)^2-6} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-14}}{(n+B)^2-4} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-7}}{(n+B)^2-2} + \frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2} \right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych $A > 0$ i $B > 5$, aby zadanie miało sens.

Rozwiązanie:

Ponieważ ostatni składnik sumy występującej w zadaniu może być zapisany jako

$$\frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2} = \frac{\sqrt{n^2+2An+A^2}}{n^2+2Bn+B^2} = \frac{\sqrt{n^2+7 \cdot \frac{2An+A^2}{7}}}{n^2+10n+25+2(B-5)n+B^2-25} = \\ = \frac{\sqrt{n^2+7 \cdot \frac{2An+A^2}{7}}}{(n+5)^2+2 \cdot \left((B-5)n + \frac{B^2-25}{2} \right)},$$

cała suma przybiera postać

$$\sum_{k=0}^{N(n)} \frac{\sqrt{n^2+7k}}{(n+5)^2+2k}, \tag{1}$$

gdzie

$$N(n) = \frac{2An+A^2}{7} = (B-5)n + \frac{B^2-25}{2}, \tag{2}$$

i w konsekwencji ma $N(n)+1$ składników. Aby zadanie miało sens, dla każdego n obie wartości $N(n)$ określone równaniami (2) muszą być równe i całkowite.

W celu znalezienia takich A i B , aby prawe równanie (2) było spełnione dla każdej liczby naturalnej n , dokonujemy następujących jego przekształceń:

$$2 \cdot (2An+A^2) = 7 \cdot (2(B-5)n+B^2-25), \\ 4An+2A^2 = 14(B-5)n+7(B^2-25). \tag{3}$$

Aby równość (3) zachodziła dla każdej liczby naturalnej n , odpowiednie współczynniki po obu jej stronach muszą być równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 4A &= 14(B-5) \\ 2A^2 &= 7(B^2-25) \end{cases}, \\ \begin{cases} 2A &= 7(B-5) \\ 2A^2 &= 7(B-5)(B+5) \end{cases} \tag{4}$$

Dzieląc drugie równanie układu (4) przez pierwsze (w którym zgodnie z założonymi nierównościami $A > 0$ i $B > 5$ obie strony są dodatnie, a więc różne od zera) otrzymujemy $A = B + 5$, co po podstawieniu do równania pierwszego daje

$$2B+10=7B-35,$$

skąd $B=9$ i $A=14$. Wstawiając te wartości do równości (2) otrzymujemy

$$N(n)=4n+28\,.$$

Wobec tego suma występująca pod znakiem granicy ma $4n+29$ składników.

Przystępując do rozwiązania głównej części zadania szacujemy sumę (1) obustronnie mnożąc liczbę składników przez ułamek, w którym wykonano niezależne szacowania na poziomie liczników i mianowników:

$$(4n+29)\cdot \frac{\sqrt{n^2}}{(n+9)^2} \leqslant \sum_{k=0}^{4n+28} \frac{\sqrt{n^2+7k}}{(n+5)^2+2k} \leqslant (4n+29)\cdot \frac{\sqrt{(n+14)^2}}{(n+5)^2}\,,$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n\rightarrow +\infty$.

Otrzymujemy

$$(4n+29)\cdot \frac{\sqrt{n^2}}{(n+9)^2} = \frac{(4n+29)\cdot n}{(n+9)^2} = \frac{4+\frac{29}{n}}{\left(1+\frac{9}{n}\right)^2} \rightarrow 4$$

oraz

$$(4n+29)\cdot \frac{\sqrt{(n+14)^2}}{(n+5)^2} = \frac{(4n+29)\cdot (n+14)}{(n+5)^2} = \frac{\left(4+\frac{29}{n}\right)\cdot \left(1+\frac{14}{n}\right)}{\left(1+\frac{5}{n}\right)^2} \rightarrow 4\,.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 4.

Odpowiedź: Zadanie ma sens dla $A=14$, $B=9$ i wówczas dana w zadaniu granica jest równa 4.

Zadanie 6. (10 punktów)

Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\sum_{k=1}^n k^4(k+1)^4 < \frac{n^3 \cdot (n+1)^3 \cdot (n+2)^3}{9}.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 1$ lewa strona dowodzonej nierówności ma wartość 16, a prawa 24. Zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $16 < 24$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$\sum_{k=1}^n k^4(k+1)^4 < \frac{n^3 \cdot (n+1)^3 \cdot (n+2)^3}{9}.$$

Wykażemy, że wówczas

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^4(k+1)^4 < \frac{(n+1)^3 \cdot (n+2)^3 \cdot (n+3)^3}{9}. \quad (\clubsuit)$$

Wychodząc od lewej strony nierówności $(\clubsuit)$ i korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$\begin{aligned} L &= \sum_{k=1}^{n+1} k^4(k+1)^4 < \frac{n^3 \cdot (n+1)^3 \cdot (n+2)^3}{9} + (n+1)^4 \cdot (n+2)^4 = \\ &= \frac{(n+1)^3 \cdot (n+2)^3}{9} \cdot (n^3 + 9 \cdot (n+1) \cdot (n+2)) = \frac{(n+1)^3 \cdot (n+2)^3}{9} \cdot (n^3 + 9n^2 + 27n + 18). \end{aligned}$$

Z kolei prawą stronę nierówności $(\clubsuit)$ możemy zapisać jako

$$\begin{aligned} P &= \frac{(n+1)^3 \cdot (n+2)^3 \cdot (n+3)^3}{9} = \frac{(n+1)^3 \cdot (n+2)^3}{9} \cdot (n+3)^3 = \\ &= \frac{(n+1)^3 \cdot (n+2)^3}{9} \cdot (n^3 + 9n^2 + 27n + 27). \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned} L &< \frac{(n+1)^3 \cdot (n+2)^3}{9} \cdot (n^3 + 9n^2 + 27n + 18) < \\ &< \frac{(n+1)^3 \cdot (n+2)^3}{9} \cdot (n^3 + 9n^2 + 27n + 27) = P, \end{aligned}$$

co kończy dowód drugiego kroku indukcyjnego.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej n .

Zadanie **7.** (10 punktów)

Wyznacz (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{\sqrt{n^2+90n+k}-n:n\in\mathbb{N}\right\}$$

w zależności od parametru rzeczywistego dodatniego k .

Rozwiązanie:

Ponieważ dany w zadaniu zbiór jest zbiorem wyrazów pewnego ciągu, zbadamy monotoniczność tego ciągu.

Przekształcając wyrażenie definiujące ciąg otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+90n+k}-n &= \sqrt{n^2+90n+k}-(n+45)+45 = \frac{n^2+90n+k-(n+45)^2}{\sqrt{n^2+90n+k}+(n+45)}+45 = \\ &= \frac{n^2+90n+k-n^2-90n-2025}{\sqrt{n^2+90n+k}+(n+45)}+45 = \frac{k-2025}{\sqrt{n^2+90n+k}+(n+45)}+45.\end{aligned}$$

Z otrzymanej postaci wynika, że:

1° Dla $k > 2025$ podane wyrażenie maleje wraz z n (stały dodatni licznik, dodatni i rosnący mianownik), a przy $n \rightarrow \infty$ dąży do 45.

W ciągu malejącym pierwszy wyraz (tu równy $\sqrt{91+k}-1$) jest największy (**kres górny**), a **kresem dolnym** zbioru wyrazów jest granica ciągu (tu równa **45**).

2° Dla $k < 2025$ podane wyrażenie rośnie wraz z n (stały ujemny licznik, dodatni i rosnący mianownik), a przy $n \rightarrow \infty$ dąży do 45.

W ciągu rosnącym pierwszy wyraz (tu równy $\sqrt{91+k}-1$) jest najmniejszy (**kres dolny**), a **kresem górnym** zbioru wyrazów jest granica ciągu (tu równa **45**).

3° Dla $k = 2025$ podane wyrażenie jest równe 45 dla każdej wartości n . Zatem dany w zadaniu zbiór jest jednoelementowy i **obydwa jego kresy** są równe **45**.

Zadanie **8.** (10 lub 20 punktów)

Wskaż odpowiednią liczbę naturalną n i udowodnij dla niej nierówności

$$3^n < n^{3^{27}} < 27^n$$

(za 10 punktów)

lub

$$9^n < n^{3^{27}} < 27^n.$$

(za 20 punktów)

Rozwiązanie:

Sposób I (za 10 punktów):

Przyjmijmy $n = 3^k$. Wówczas podane nierówności przybierają postać

$$3^{3^k} < 3^{k \cdot 3^{27}} < 27^{3^k},$$

czyli kolejno

$$3^{3^k} < 3^{k \cdot 3^{27}} < 3^{3 \cdot 3^k},$$
$$3^k < k \cdot 3^{27} < 3 \cdot 3^k.$$

(♡)

Pozostaje zauważyć, że nierówności (♡) są spełnione dla $k = 30$, gdyż wtedy

$$3^k = 3^{30} = 27 \cdot 3^{27} < 30 \cdot 3^{27} = k \cdot 3^{27} < 81 \cdot 3^{27} = 3 \cdot 3^{30} = 3 \cdot 3^k.$$

Odpowiedź: Liczbą spełniającą podane nierówności jest $n = 3^{30}$.

Sposób II (za 20 punktów):

Przyjmijmy $n = k \cdot 3^{27}$. Wtedy podane nierówności przybierają postać

$$9^{k \cdot 3^{27}} < (k \cdot 3^{27})^{3^{27}} < 27^{k \cdot 3^{27}},$$

czyli

$$(9^k)^{3^{27}} < (k \cdot 3^{27})^{3^{27}} < (27^k)^{3^{27}},$$

co jest równoważne kolejnym nierównościom

$$9^k < k \cdot 3^{27} < 27^k,$$
$$3^{2k} < k \cdot 3^{27} < 3^{3k}.$$

(♣)

Zauważmy, że nierówności (♣) są prawdziwe dla $k \in [10, 14]$, gdyż wówczas

$$3^{2k} \leq 3^{28} = 3 \cdot 3^{27} < k \cdot 3^{27} < 27 \cdot 3^{27} = 3^{30} \leq 3^{3k}.$$

Odpowiedź: Liczbami spełniającymi podane nierówności są liczby postaci $n = k \cdot 3^{27}$, gdzie $10 \leq k \leq 14$.