

ANALIZA 1, KOŁOKWIUM nr **4**, **20.11.2025**, godz. 8:15–9:45

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOŁOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **5.** (10 punktów)

Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+5)^2} + \frac{\sqrt{n^2+7}}{(n+5)^2+2} + \frac{\sqrt{n^2+14}}{(n+5)^2+4} + \frac{\sqrt{n^2+21}}{(n+5)^2+6} + \frac{\sqrt{n^2+28}}{(n+5)^2+8} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\sqrt{n^2+7k}}{(n+5)^2+2k} + \dots + \frac{\sqrt{(n+A)^2-21}}{(n+B)^2-6} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-14}}{(n+B)^2-4} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-7}}{(n+B)^2-2} + \frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2} \right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych $A > 0$ i $B > 5$, aby zadanie miało sens.

Zadanie **6.** (10 punktów)

Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\sum_{k=1}^n k^4(k+1)^4 < \frac{n^3 \cdot (n+1)^3 \cdot (n+2)^3}{9}.$$

Zadanie **7.** (10 punktów)

Wyznacz (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\{\sqrt{n^2+90n+k} - n : n \in \mathbb{N}\}$$

w zależności od parametru rzeczywistego dodatniego k .

Zadanie **8.** (10 lub 20 punktów)

Wskaż odpowiednią liczbę naturalną n i udowodnij dla niej nierówności

$$3^n < n^{3^{27}} < 27^n \quad (\text{za 10 punktów})$$

lub

$$9^n < n^{3^{27}} < 27^n. \quad (\text{za 20 punktów})$$