

**ANALIZA 1**

4 grudnia 2025 r., godz. 8:15–9:45

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadania 11, 12 i 13 to zadania dodatkowe.

**Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.**

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Z ułamków nie trzeba wyłączać części całkowitej:  
np. wystarczy podać  $\frac{77}{3}$ , ale  $25\frac{2}{3}$  też będzie uznane.

**Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry**

**NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.**

1. Podaj wartość granicy dla tak dobranego parametru  $k$ , aby granica ta była dodatnia i skończona.

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \left( \sqrt{n^{60} + kn^{13}} - n^{30} \right) = \mathbf{17/2}$  dla  $k = \mathbf{17}$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \left( \sqrt[3]{n^{60} + kn^{13}} - n^{20} \right) = \mathbf{9}$  dla  $k = \mathbf{27}$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \left( \sqrt[4]{n^{60} + kn^{13}} - n^{15} \right) = \mathbf{8}$  dla  $k = \mathbf{32}$

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \left( \sqrt[5]{n^{60} + kn^{13}} - n^{12} \right) = \mathbf{7}$  dla  $k = \mathbf{35}$

2. Podaj wartość granicy.

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=7n+1}^{9n} \frac{k}{\sqrt{4n^4 + k}} = \mathbf{8}$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=5n+1}^{7n} \frac{k}{\sqrt{4n^4 + k}} = \mathbf{6}$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=3n+1}^{5n} \frac{k}{\sqrt{4n^4 + k}} = \mathbf{4}$

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{3n} \frac{k}{\sqrt{4n^4 + k}} = \mathbf{2}$

3. Podaj wartość granicy.

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2n+1}^{3n} \frac{kn}{\sqrt{9n^6 + k}} = \mathbf{5/6}$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{kn}{\sqrt{9n^6 + k}} = \mathbf{1/2}$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=4n+1}^{5n} \frac{kn}{\sqrt{9n^6 + k}} = \mathbf{3/2}$

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=3n+1}^{4n} \frac{kn}{\sqrt{9n^6 + k}} = \mathbf{7/6}$

4. Niech  $G(k) = \sup \left\{ \frac{1}{k - 3^n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ . Wtedy:

a)  $G(77) = \mathbf{1/50}$

b)  $G(88) = \mathbf{1/7}$

c)  $G(99) = \mathbf{1/18}$

d)  $G(90) = \mathbf{1/9}$

5. Podaj kres dolny zbioru.

a)  $\inf \{x^2 + 2x : x \in (-3, 3)\} = -1$

b)  $\inf \{x^2 + 4x : x \in (-3, 3)\} = -4$

c)  $\inf \{x^2 + 2y : x, y \in (-3, 3)\} = -6$

d)  $\inf \{x^2 + 4y : x, y \in (-3, 3)\} = -12$

6. Podaj dziedzinę funkcji  $f$  określonej podanym wzorem.

a)  $f(x) = \sqrt{(x-1)^4 \cdot (x-2)^6 \cdot (x-3)^7}$ ,  $D_f = \{1\} \cup \{2\} \cup [3, \infty)$

b)  $f(x) = \sqrt{(x-1)^3 \cdot (x-2)^6 \cdot (x-3)^7}$ ,  $D_f = (-\infty, 1] \cup \{2\} \cup [3, \infty)$

c)  $f(x) = \sqrt{(x-1)^3 \cdot (x-2)^5 \cdot (x-3)^8}$ ,  $D_f = (-\infty, 1] \cup [2, \infty)$

d)  $f(x) = \sqrt{(x-1)^3 \cdot (x-2)^5 \cdot (x-3)^7}$ ,  $D_f = [1, 2] \cup [3, \infty)$

7. Podaj dziedzinę funkcji  $f$  określonej podanym wzorem.

a)  $f(x) = \log_3 \log_5 |\log_7 x|$ ,  $D_f = (0, 1/7) \cup (7, \infty)$

b)  $f(x) = \log_2 \log_3 |\log_5 x|$ ,  $D_f = (0, 1/5) \cup (5, \infty)$

c)  $f(x) = \log_5 \log_3 \log_2 |\log_7 x|$ ,  $D_f = (0, 1/49) \cup (49, \infty)$

d)  $f(x) = \log_7 \log_5 \log_3 |\log_2 x|$ ,  $D_f = (0, 1/8) \cup (8, \infty)$

8. Niech  $f(x) = x^2 + x$ . Podaj przeciwobrazy przedziałów.

a)  $f^{-1}[(-30, 30)] = (-6, 5)$

b)  $f^{-1}[(0, 2)] = (-2, -1) \cup (0, 1)$

c)  $f^{-1}[(0, 30)] = (-6, -1) \cup (0, 5)$

d)  $f^{-1}[(2, 30)] = (-6, -2) \cup (1, 5)$

**9.** Niech  $f(x) = x^3 + x$ . Podaj przeciwobrazy przedziałów.

a)  $f^{-1}[(0, 2)] = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$

b)  $f^{-1}[(0, 30)] = (\mathbf{0}, \mathbf{3})$

c)  $f^{-1}[(2, 30)] = (\mathbf{1}, \mathbf{3})$

d)  $f^{-1}[(-30, 30)] = (\mathbf{-3}, \mathbf{3})$

**10.** Dla podanej wartości  $b$  podaj takie  $a$ , aby funkcja  $f(x) = ax + \sqrt{bx^2 + 1}$  była odwrotna do samej siebie.

a)  $b = 24, \quad a = \mathbf{-5}$

b)  $b = 16, \quad a = \mathbf{-\sqrt{17}}$

c)  $b = 15, \quad a = \mathbf{-4}$

d)  $b = 8, \quad a = \mathbf{-3}$

**11.** Niech  $Z(a, b) = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge m^2 + an^2 \leqslant bmn \right\}$ . Podaj kresy.

a)  $\sup Z(8, 6) = \mathbf{4}$

b)  $\inf Z(8, 6) = \mathbf{2}$

c)  $\sup Z(15, 8) = \mathbf{5}$

d)  $\inf Z(15, 8) = \mathbf{3}$

**12.** To samo, co w zadaniu poprzednim.

a)  $\sup Z(40, 14) = \mathbf{10}$

b)  $\inf Z(21, 10) = \mathbf{3}$

c)  $\sup Z(21, 10) = \mathbf{7}$

d)  $\inf Z(40, 14) = \mathbf{4}$

**13.** Dla podanych liczb  $A$  i  $B$  podaj takie liczby naturalne  $n, k$ , że  $Bk \leqslant n$  oraz  $A \cdot \binom{n}{k} = \binom{n}{Bk}$ .

a)  $A = 3, \quad B = 5, \quad n = \mathbf{7}, \quad k = \mathbf{1}$

b)  $A = 7, \quad B = 9, \quad n = \mathbf{31}, \quad k = \mathbf{3}$

c)  $A = 5, \quad B = 7, \quad n = \mathbf{17}, \quad k = \mathbf{2}$

d)  $A = 9, \quad B = 11, \quad n = \mathbf{49}, \quad k = \mathbf{4}$

**ANALIZA 1**

4 grudnia 2025 r., godz. 8:15–9:45

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadania 11, 12 i 13 to zadania dodatkowe.

**Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.**

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Z ułamków nie trzeba wyłączać części całkowitej:  
np. wystarczy podać  $\frac{77}{3}$ , ale  $25\frac{2}{3}$  też będzie uznane.

**Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry**

**NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.**

1. Podaj wartość granicy dla tak dobranego parametru  $k$ , aby granica ta była dodatnia i skończona.

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \left( \sqrt[4]{n^{60} + kn^{13}} - n^{15} \right) = 8$  dla  $k = \mathbf{32}$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \left( \sqrt[3]{n^{60} + kn^{13}} - n^{20} \right) = 9$  dla  $k = \mathbf{27}$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \left( \sqrt{n^{60} + kn^{13}} - n^{30} \right) = \mathbf{17/2}$  dla  $k = \mathbf{17}$

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \left( \sqrt[5]{n^{60} + kn^{13}} - n^{12} \right) = 7$  dla  $k = \mathbf{35}$

2. Podaj wartość granicy.

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{3n} \frac{k}{\sqrt{4n^4 + k}} = \mathbf{2}$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=3n+1}^{5n} \frac{k}{\sqrt{4n^4 + k}} = \mathbf{4}$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=7n+1}^{9n} \frac{k}{\sqrt{4n^4 + k}} = \mathbf{8}$

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=5n+1}^{7n} \frac{k}{\sqrt{4n^4 + k}} = \mathbf{6}$

3. Podaj wartość granicy.

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=4n+1}^{5n} \frac{kn}{\sqrt{9n^6 + k}} = \mathbf{3/2}$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2n+1}^{3n} \frac{kn}{\sqrt{9n^6 + k}} = \mathbf{5/6}$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{kn}{\sqrt{9n^6 + k}} = \mathbf{1/2}$

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=3n+1}^{4n} \frac{kn}{\sqrt{9n^6 + k}} = \mathbf{7/6}$

4. Niech  $G(k) = \sup \left\{ \frac{1}{k - 3^n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ . Wtedy:

a)  $G(77) = \mathbf{1/50}$

b)  $G(90) = \mathbf{1/9}$

c)  $G(99) = \mathbf{1/18}$

d)  $G(88) = \mathbf{1/7}$

5. Podaj kres dolny zbioru.

a)  $\inf \{x^2 + 2y : x, y \in (-3, 3)\} = -6$

b)  $\inf \{x^2 + 4x : x \in (-3, 3)\} = -4$

c)  $\inf \{x^2 + 2x : x \in (-3, 3)\} = -1$

d)  $\inf \{x^2 + 4y : x, y \in (-3, 3)\} = -12$

6. Podaj dziedzinę funkcji  $f$  określonej podanym wzorem.

a)  $f(x) = \sqrt{(x-1)^3 \cdot (x-2)^5 \cdot (x-3)^7}$ ,  $D_f = [1, 2] \cup [3, \infty)$

b)  $f(x) = \sqrt{(x-1)^3 \cdot (x-2)^5 \cdot (x-3)^8}$ ,  $D_f = (-\infty, 1] \cup [2, \infty)$

c)  $f(x) = \sqrt{(x-1)^4 \cdot (x-2)^6 \cdot (x-3)^7}$ ,  $D_f = \{1\} \cup \{2\} \cup [3, \infty)$

d)  $f(x) = \sqrt{(x-1)^3 \cdot (x-2)^6 \cdot (x-3)^7}$ ,  $D_f = (-\infty, 1] \cup \{2\} \cup [3, \infty)$

7. Podaj dziedzinę funkcji  $f$  określonej podanym wzorem.

a)  $f(x) = \log_5 \log_3 \log_2 |\log_7 x|$ ,  $D_f = (0, 1/49) \cup (49, \infty)$

b)  $f(x) = \log_3 \log_5 |\log_7 x|$ ,  $D_f = (0, 1/7) \cup (7, \infty)$

c)  $f(x) = \log_2 \log_3 |\log_5 x|$ ,  $D_f = (0, 1/5) \cup (5, \infty)$

d)  $f(x) = \log_7 \log_5 \log_3 |\log_2 x|$ ,  $D_f = (0, 1/8) \cup (8, \infty)$

8. Niech  $f(x) = x^2 + x$ . Podaj przeciwobrazy przedziałów.

a)  $f^{-1}[(-30, 30)] = (-6, 5)$

b)  $f^{-1}[(2, 30)] = (-6, -2) \cup (1, 5)$

c)  $f^{-1}[(0, 30)] = (-6, -1) \cup (0, 5)$

d)  $f^{-1}[(0, 2)] = (-2, -1) \cup (0, 1)$

**9.** Niech  $f(x) = x^3 + x$ . Podaj przeciwobrazy przedziałów.

a)  $f^{-1}[(2, 30)] = (\mathbf{1}, \mathbf{3})$

b)  $f^{-1}[(0, 30)] = (\mathbf{0}, \mathbf{3})$

c)  $f^{-1}[(0, 2)] = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$

d)  $f^{-1}[(-30, 30)] = (\mathbf{-3}, \mathbf{3})$

**10.** Dla podanej wartości  $b$  podaj takie  $a$ , aby funkcja  $f(x) = ax + \sqrt{bx^2 + 1}$  była odwrotna do samej siebie.

a)  $b = 8, \quad a = \mathbf{-3}$

b)  $b = 15, \quad a = \mathbf{-4}$

c)  $b = 24, \quad a = \mathbf{-5}$

d)  $b = 16, \quad a = \mathbf{-\sqrt{17}}$

**11.** Niech  $Z(a, b) = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge m^2 + an^2 \leqslant bmn \right\}$ . Podaj kresy.

a)  $\sup Z(15, 8) = \mathbf{5}$

b)  $\sup Z(8, 6) = \mathbf{4}$

c)  $\inf Z(8, 6) = \mathbf{2}$

d)  $\inf Z(15, 8) = \mathbf{3}$

**12.** To samo, co w zadaniu poprzednim.

a)  $\sup Z(40, 14) = \mathbf{10}$

b)  $\inf Z(40, 14) = \mathbf{4}$

c)  $\sup Z(21, 10) = \mathbf{7}$

d)  $\inf Z(21, 10) = \mathbf{3}$

**13.** Dla podanych liczb  $A$  i  $B$  podaj takie liczby naturalne  $n, k$ , że  $Bk \leqslant n$  oraz  $A \cdot \binom{n}{k} = \binom{n}{Bk}$ .

a)  $A = 9, \quad B = 11, \quad n = \mathbf{49}, \quad k = \mathbf{4}$

b)  $A = 7, \quad B = 9, \quad n = \mathbf{31}, \quad k = \mathbf{3}$

c)  $A = 5, \quad B = 7, \quad n = \mathbf{17}, \quad k = \mathbf{2}$

d)  $A = 3, \quad B = 5, \quad n = \mathbf{7}, \quad k = \mathbf{1}$



**ANALIZA 1**

4 grudnia 2025 r., godz. 8:15–9:45

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadania 11, 12 i 13 to zadania dodatkowe.

**Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.**

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Z ułamków nie trzeba wyłączać części całkowitej:  
np. wystarczy podać  $\frac{77}{3}$ , ale  $25\frac{2}{3}$  też będzie uznane.

**Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry**

**NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.**

1. Podaj wartość granicy dla tak dobranego parametru  $k$ , aby granica ta była dodatnia i skończona.

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \left( \sqrt[4]{n^{60} + kn^{13}} - n^{15} \right) = 8$  dla  $k = \mathbf{32}$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \left( \sqrt{n^{60} + kn^{13}} - n^{30} \right) = \mathbf{17/2}$  dla  $k = \mathbf{17}$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \left( \sqrt[5]{n^{60} + kn^{13}} - n^{12} \right) = \mathbf{7}$  dla  $k = \mathbf{35}$

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \left( \sqrt[3]{n^{60} + kn^{13}} - n^{20} \right) = \mathbf{9}$  dla  $k = \mathbf{27}$

2. Podaj wartość granicy.

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=7n+1}^{9n} \frac{k}{\sqrt{4n^4 + k}} = \mathbf{8}$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=3n+1}^{5n} \frac{k}{\sqrt{4n^4 + k}} = \mathbf{4}$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{3n} \frac{k}{\sqrt{4n^4 + k}} = \mathbf{2}$

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=5n+1}^{7n} \frac{k}{\sqrt{4n^4 + k}} = \mathbf{6}$

3. Podaj wartość granicy.

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{kn}{\sqrt{9n^6 + k}} = \mathbf{1/2}$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2n+1}^{3n} \frac{kn}{\sqrt{9n^6 + k}} = \mathbf{5/6}$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=4n+1}^{5n} \frac{kn}{\sqrt{9n^6 + k}} = \mathbf{3/2}$

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=3n+1}^{4n} \frac{kn}{\sqrt{9n^6 + k}} = \mathbf{7/6}$

4. Niech  $G(k) = \sup \left\{ \frac{1}{k - 3^n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ . Wtedy:

a)  $G(77) = \mathbf{1/50}$

b)  $G(99) = \mathbf{1/18}$

c)  $G(90) = \mathbf{1/9}$

d)  $G(88) = \mathbf{1/7}$

5. Podaj kres dolny zbioru.

a)  $\inf \{x^2 + 2y : x, y \in (-3, 3)\} = -6$

b)  $\inf \{x^2 + 2x : x \in (-3, 3)\} = -1$

c)  $\inf \{x^2 + 4y : x, y \in (-3, 3)\} = -12$

d)  $\inf \{x^2 + 4x : x \in (-3, 3)\} = -4$

6. Podaj dziedzinę funkcji  $f$  określonej podanym wzorem.

a)  $f(x) = \sqrt{(x-1)^4 \cdot (x-2)^6 \cdot (x-3)^7}$ ,  $D_f = \{1\} \cup \{2\} \cup [3, \infty)$

b)  $f(x) = \sqrt{(x-1)^3 \cdot (x-2)^5 \cdot (x-3)^8}$ ,  $D_f = (-\infty, 1] \cup [2, \infty)$

c)  $f(x) = \sqrt{(x-1)^3 \cdot (x-2)^5 \cdot (x-3)^7}$ ,  $D_f = [1, 2] \cup [3, \infty)$

d)  $f(x) = \sqrt{(x-1)^3 \cdot (x-2)^6 \cdot (x-3)^7}$ ,  $D_f = (-\infty, 1] \cup \{2\} \cup [3, \infty)$

7. Podaj dziedzinę funkcji  $f$  określonej podanym wzorem.

a)  $f(x) = \log_2 \log_3 |\log_5 x|$ ,  $D_f = (0, 1/5) \cup (5, \infty)$

b)  $f(x) = \log_3 \log_5 |\log_7 x|$ ,  $D_f = (0, 1/7) \cup (7, \infty)$

c)  $f(x) = \log_5 \log_3 \log_2 |\log_7 x|$ ,  $D_f = (0, 1/49) \cup (49, \infty)$

d)  $f(x) = \log_7 \log_5 \log_3 |\log_2 x|$ ,  $D_f = (0, 1/8) \cup (8, \infty)$

8. Niech  $f(x) = x^2 + x$ . Podaj przeciwobrazy przedziałów.

a)  $f^{-1}[(-30, 30)] = (-6, 5)$

b)  $f^{-1}[(0, 30)] = (-6, -1) \cup (0, 5)$

c)  $f^{-1}[(2, 30)] = (-6, -2) \cup (1, 5)$

d)  $f^{-1}[(0, 2)] = (-2, -1) \cup (0, 1)$

**9.** Niech  $f(x) = x^3 + x$ . Podaj przeciwobrazy przedziałów.

a)  $f^{-1}[(2, 30)] = (\mathbf{1}, \mathbf{3})$

b)  $f^{-1}[(0, 2)] = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$

c)  $f^{-1}[(-30, 30)] = (\mathbf{-3}, \mathbf{3})$

d)  $f^{-1}[(0, 30)] = (\mathbf{0}, \mathbf{3})$

**10.** Dla podanej wartości  $b$  podaj takie  $a$ , aby funkcja  $f(x) = ax + \sqrt{bx^2 + 1}$  była odwrotna do samej siebie.

a)  $b = 24, \quad a = \mathbf{-5}$

b)  $b = 15, \quad a = \mathbf{-4}$

c)  $b = 8, \quad a = \mathbf{-3}$

d)  $b = 16, \quad a = \mathbf{-\sqrt{17}}$

**11.** Niech  $Z(a, b) = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge m^2 + an^2 \leqslant bmn \right\}$ . Podaj kresy.

a)  $\inf Z(8, 6) = \mathbf{2}$

b)  $\sup Z(8, 6) = \mathbf{4}$

c)  $\sup Z(15, 8) = \mathbf{5}$

d)  $\inf Z(15, 8) = \mathbf{3}$

**12.** To samo, co w zadaniu poprzednim.

a)  $\sup Z(40, 14) = \mathbf{10}$

b)  $\sup Z(21, 10) = \mathbf{7}$

c)  $\inf Z(40, 14) = \mathbf{4}$

d)  $\inf Z(21, 10) = \mathbf{3}$

**13.** Dla podanych liczb  $A$  i  $B$  podaj takie liczby naturalne  $n, k$ , że  $Bk \leqslant n$  oraz  $A \cdot \binom{n}{k} = \binom{n}{Bk}$ .

a)  $A = 5, \quad B = 7, \quad n = \mathbf{17}, \quad k = \mathbf{2}$

b)  $A = 3, \quad B = 5, \quad n = \mathbf{7}, \quad k = \mathbf{1}$

c)  $A = 9, \quad B = 11, \quad n = \mathbf{49}, \quad k = \mathbf{4}$

d)  $A = 7, \quad B = 9, \quad n = \mathbf{31}, \quad k = \mathbf{3}$

**ANALIZA 1**

4 grudnia 2025 r., godz. 8:15–9:45

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadania 11, 12 i 13 to zadania dodatkowe.

**Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.**

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Z ułamków nie trzeba wyłączać części całkowitej:  
np. wystarczy podać  $\frac{77}{3}$ , ale  $25\frac{2}{3}$  też będzie uznane.

**Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry**

**NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.**

1. Podaj wartość granicy dla tak dobranego parametru  $k$ , aby granica ta była dodatnia i skończona.

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \left( \sqrt{n^{60} + kn^{13}} - n^{30} \right) = \mathbf{17/2}$  dla  $k = \mathbf{17}$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \left( \sqrt[5]{n^{60} + kn^{13}} - n^{12} \right) = \mathbf{7}$  dla  $k = \mathbf{35}$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \left( \sqrt[3]{n^{60} + kn^{13}} - n^{20} \right) = \mathbf{9}$  dla  $k = \mathbf{27}$

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \left( \sqrt[4]{n^{60} + kn^{13}} - n^{15} \right) = \mathbf{8}$  dla  $k = \mathbf{32}$

2. Podaj wartość granicy.

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=7n+1}^{9n} \frac{k}{\sqrt{4n^4 + k}} = \mathbf{8}$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{3n} \frac{k}{\sqrt{4n^4 + k}} = \mathbf{2}$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=5n+1}^{7n} \frac{k}{\sqrt{4n^4 + k}} = \mathbf{6}$

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=3n+1}^{5n} \frac{k}{\sqrt{4n^4 + k}} = \mathbf{4}$

3. Podaj wartość granicy.

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=4n+1}^{5n} \frac{kn}{\sqrt{9n^6 + k}} = \mathbf{3/2}$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2n+1}^{3n} \frac{kn}{\sqrt{9n^6 + k}} = \mathbf{5/6}$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=3n+1}^{4n} \frac{kn}{\sqrt{9n^6 + k}} = \mathbf{7/6}$

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{kn}{\sqrt{9n^6 + k}} = \mathbf{1/2}$

4. Niech  $G(k) = \sup \left\{ \frac{1}{k - 3^n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ . Wtedy:

a)  $G(77) = \mathbf{1/50}$

b)  $G(90) = \mathbf{1/9}$

c)  $G(88) = \mathbf{1/7}$

d)  $G(99) = \mathbf{1/18}$

5. Podaj kres dolny zbioru.

a)  $\inf \{x^2 + 2x : x \in (-3, 3)\} = -1$

b)  $\inf \{x^2 + 4y : x, y \in (-3, 3)\} = -12$

c)  $\inf \{x^2 + 4x : x \in (-3, 3)\} = -4$

d)  $\inf \{x^2 + 2y : x, y \in (-3, 3)\} = -6$

6. Podaj dziedzinę funkcji  $f$  określonej podanym wzorem.

a)  $f(x) = \sqrt{(x-1)^4 \cdot (x-2)^6 \cdot (x-3)^7}$ ,  $D_f = \{1\} \cup \{2\} \cup [3, \infty)$

b)  $f(x) = \sqrt{(x-1)^3 \cdot (x-2)^5 \cdot (x-3)^7}$ ,  $D_f = [1, 2] \cup [3, \infty)$

c)  $f(x) = \sqrt{(x-1)^3 \cdot (x-2)^6 \cdot (x-3)^7}$ ,  $D_f = (-\infty, 1] \cup \{2\} \cup [3, \infty)$

d)  $f(x) = \sqrt{(x-1)^3 \cdot (x-2)^5 \cdot (x-3)^8}$ ,  $D_f = (-\infty, 1] \cup [2, \infty)$

7. Podaj dziedzinę funkcji  $f$  określonej podanym wzorem.

a)  $f(x) = \log_5 \log_3 \log_2 |\log_7 x|$ ,  $D_f = (0, 1/49) \cup (49, \infty)$

b)  $f(x) = \log_3 \log_5 |\log_7 x|$ ,  $D_f = (0, 1/7) \cup (7, \infty)$

c)  $f(x) = \log_7 \log_5 \log_3 |\log_2 x|$ ,  $D_f = (0, 1/8) \cup (8, \infty)$

d)  $f(x) = \log_2 \log_3 |\log_5 x|$ ,  $D_f = (0, 1/5) \cup (5, \infty)$

8. Niech  $f(x) = x^2 + x$ . Podaj przeciwobrazy przedziałów.

a)  $f^{-1}[(-30, 30)] = (-6, 5)$

b)  $f^{-1}[(2, 30)] = (-6, -2) \cup (1, 5)$

c)  $f^{-1}[(0, 2)] = (-2, -1) \cup (0, 1)$

d)  $f^{-1}[(0, 30)] = (-6, -1) \cup (0, 5)$

**9.** Niech  $f(x) = x^3 + x$ . Podaj przeciwobrazy przedziałów.

a)  $f^{-1}[(0, 2)] = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$

b)  $f^{-1}[(-30, 30)] = (\mathbf{-3}, \mathbf{3})$

c)  $f^{-1}[(0, 30)] = (\mathbf{0}, \mathbf{3})$

d)  $f^{-1}[(2, 30)] = (\mathbf{1}, \mathbf{3})$

**10.** Dla podanej wartości  $b$  podaj takie  $a$ , aby funkcja  $f(x) = ax + \sqrt{bx^2 + 1}$  była odwrotna do samej siebie.

a)  $b = 24, \quad a = \mathbf{-5}$

b)  $b = 8, \quad a = \mathbf{-3}$

c)  $b = 16, \quad a = \mathbf{-\sqrt{17}}$

d)  $b = 15, \quad a = \mathbf{-4}$

**11.** Niech  $Z(a, b) = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge m^2 + an^2 \leqslant bmn \right\}$ . Podaj kresy.

a)  $\sup Z(15, 8) = \mathbf{5}$

b)  $\sup Z(8, 6) = \mathbf{4}$

c)  $\inf Z(15, 8) = \mathbf{3}$

d)  $\inf Z(8, 6) = \mathbf{2}$

**12.** To samo, co w zadaniu poprzednim.

a)  $\sup Z(40, 14) = \mathbf{10}$

b)  $\inf Z(40, 14) = \mathbf{4}$

c)  $\inf Z(21, 10) = \mathbf{3}$

d)  $\sup Z(21, 10) = \mathbf{7}$

**13.** Dla podanych liczb  $A$  i  $B$  podaj takie liczby naturalne  $n, k$ , że  $Bk \leqslant n$  oraz  $A \cdot \binom{n}{k} = \binom{n}{Bk}$ .

a)  $A = 5, \quad B = 7, \quad n = \mathbf{17}, \quad k = \mathbf{2}$

b)  $A = 3, \quad B = 5, \quad n = \mathbf{7}, \quad k = \mathbf{1}$

c)  $A = 7, \quad B = 9, \quad n = \mathbf{31}, \quad k = \mathbf{3}$

d)  $A = 9, \quad B = 11, \quad n = \mathbf{49}, \quad k = \mathbf{4}$



**ANALIZA 1**

4 grudnia 2025 r., godz. 8:15–9:45

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadania 11, 12 i 13 to zadania dodatkowe.

**Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.**

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Z ułamków nie trzeba wyłączać części całkowitej:  
np. wystarczy podać  $\frac{77}{3}$ , ale  $25\frac{2}{3}$  też będzie uznane.

**Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry**

**NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.**

1. Podaj wartość granicy dla tak dobranego parametru  $k$ , aby granica ta była dodatnia i skończona.

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \left( \sqrt[3]{n^{60} + kn^{13}} - n^{20} \right) = \mathbf{9}$  dla  $k = \mathbf{27}$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \left( \sqrt{n^{60} + kn^{13}} - n^{30} \right) = \mathbf{17/2}$  dla  $k = \mathbf{17}$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \left( \sqrt[4]{n^{60} + kn^{13}} - n^{15} \right) = \mathbf{8}$  dla  $k = \mathbf{32}$

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \left( \sqrt[5]{n^{60} + kn^{13}} - n^{12} \right) = \mathbf{7}$  dla  $k = \mathbf{35}$

2. Podaj wartość granicy.

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=3n+1}^{5n} \frac{k}{\sqrt{4n^4 + k}} = \mathbf{4}$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=5n+1}^{7n} \frac{k}{\sqrt{4n^4 + k}} = \mathbf{6}$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{3n} \frac{k}{\sqrt{4n^4 + k}} = \mathbf{2}$

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=7n+1}^{9n} \frac{k}{\sqrt{4n^4 + k}} = \mathbf{8}$

3. Podaj wartość granicy.

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=3n+1}^{4n} \frac{kn}{\sqrt{9n^6 + k}} = \mathbf{7/6}$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2n+1}^{3n} \frac{kn}{\sqrt{9n^6 + k}} = \mathbf{5/6}$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=4n+1}^{5n} \frac{kn}{\sqrt{9n^6 + k}} = \mathbf{3/2}$

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{kn}{\sqrt{9n^6 + k}} = \mathbf{1/2}$

4. Niech  $G(k) = \sup \left\{ \frac{1}{k - 3^n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ . Wtedy:

a)  $G(99) = \mathbf{1/18}$

b)  $G(90) = \mathbf{1/9}$

c)  $G(77) = \mathbf{1/50}$

d)  $G(88) = \mathbf{1/7}$

5. Podaj kres dolny zbioru.

a)  $\inf \{x^2 + 4x : x \in (-3, 3)\} = -4$

b)  $\inf \{x^2 + 2x : x \in (-3, 3)\} = -1$

c)  $\inf \{x^2 + 2y : x, y \in (-3, 3)\} = -6$

d)  $\inf \{x^2 + 4y : x, y \in (-3, 3)\} = -12$

6. Podaj dziedzinę funkcji  $f$  określonej podanym wzorem.

a)  $f(x) = \sqrt{(x-1)^3 \cdot (x-2)^5 \cdot (x-3)^8}$ ,  $D_f = (-\infty, 1] \cup [2, \infty)$

b)  $f(x) = \sqrt{(x-1)^3 \cdot (x-2)^6 \cdot (x-3)^7}$ ,  $D_f = (-\infty, 1] \cup \{2\} \cup [3, \infty)$

c)  $f(x) = \sqrt{(x-1)^3 \cdot (x-2)^5 \cdot (x-3)^7}$ ,  $D_f = [1, 2] \cup [3, \infty)$

d)  $f(x) = \sqrt{(x-1)^4 \cdot (x-2)^6 \cdot (x-3)^7}$ ,  $D_f = \{1\} \cup \{2\} \cup [3, \infty)$

7. Podaj dziedzinę funkcji  $f$  określonej podanym wzorem.

a)  $f(x) = \log_7 \log_5 \log_3 |\log_2 x|$ ,  $D_f = (0, 1/8) \cup (8, \infty)$

b)  $f(x) = \log_3 \log_5 |\log_7 x|$ ,  $D_f = (0, 1/7) \cup (7, \infty)$

c)  $f(x) = \log_5 \log_3 \log_2 |\log_7 x|$ ,  $D_f = (0, 1/49) \cup (49, \infty)$

d)  $f(x) = \log_2 \log_3 |\log_5 x|$ ,  $D_f = (0, 1/5) \cup (5, \infty)$

8. Niech  $f(x) = x^2 + x$ . Podaj przeciwobrazy przedziałów.

a)  $f^{-1}[(0, 30)] = (-6, -1) \cup (0, 5)$       b)  $f^{-1}[(2, 30)] = (-6, -2) \cup (1, 5)$

c)  $f^{-1}[(-30, 30)] = (-6, 5)$       d)  $f^{-1}[(0, 2)] = (-2, -1) \cup (0, 1)$

**9.** Niech  $f(x) = x^3 + x$ . Podaj przeciwobrazy przedziałów.

a)  $f^{-1}[(0, 30)] = (\mathbf{0}, \mathbf{3})$

b)  $f^{-1}[(0, 2)] = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$

c)  $f^{-1}[(2, 30)] = (\mathbf{1}, \mathbf{3})$

d)  $f^{-1}[(-30, 30)] = (\mathbf{-3}, \mathbf{3})$

**10.** Dla podanej wartości  $b$  podaj takie  $a$ , aby funkcja  $f(x) = ax + \sqrt{bx^2 + 1}$  była odwrotna do samej siebie.

a)  $b = 15, \quad a = \mathbf{-4}$

b)  $b = 16, \quad a = \mathbf{-\sqrt{17}}$

c)  $b = 8, \quad a = \mathbf{-3}$

d)  $b = 24, \quad a = \mathbf{-5}$

**11.** Niech  $Z(a, b) = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge m^2 + an^2 \leqslant bmn \right\}$ . Podaj kresy.

a)  $\inf Z(15, 8) = \mathbf{3}$

b)  $\sup Z(8, 6) = \mathbf{4}$

c)  $\sup Z(15, 8) = \mathbf{5}$

d)  $\inf Z(8, 6) = \mathbf{2}$

**12.** To samo, co w zadaniu poprzednim.

a)  $\sup Z(21, 10) = \mathbf{7}$

b)  $\inf Z(40, 14) = \mathbf{4}$

c)  $\sup Z(40, 14) = \mathbf{10}$

d)  $\inf Z(21, 10) = \mathbf{3}$

**13.** Dla podanych liczb  $A$  i  $B$  podaj takie liczby naturalne  $n, k$ , że  $Bk \leqslant n$  oraz  $A \cdot \binom{n}{k} = \binom{n}{Bk}$ .

a)  $A = 7, \quad B = 9, \quad n = \mathbf{31}, \quad k = \mathbf{3}$

b)  $A = 9, \quad B = 11, \quad n = \mathbf{49}, \quad k = \mathbf{4}$

c)  $A = 3, \quad B = 5, \quad n = \mathbf{7}, \quad k = \mathbf{1}$

d)  $A = 5, \quad B = 7, \quad n = \mathbf{17}, \quad k = \mathbf{2}$

**ANALIZA 1**

4 grudnia 2025 r., godz. 8:15–9:45

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadania 11, 12 i 13 to zadania dodatkowe.

**Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.**

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Z ułamków nie trzeba wyłączać części całkowitej:  
np. wystarczy podać  $\frac{77}{3}$ , ale  $25\frac{2}{3}$  też będzie uznane.

**Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry**

**NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.**

**1.** Podaj wartość granicy dla tak dobranego parametru  $k$ , aby granica ta była dodatnia i skończona.

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \left( \sqrt[4]{n^{60} + kn^{13}} - n^{15} \right) = 8$  dla  $k = \mathbf{32}$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \left( \sqrt{n^{60} + kn^{13}} - n^{30} \right) = \mathbf{17/2}$  dla  $k = \mathbf{17}$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \left( \sqrt[5]{n^{60} + kn^{13}} - n^{12} \right) = \mathbf{7}$  dla  $k = \mathbf{35}$

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \left( \sqrt[3]{n^{60} + kn^{13}} - n^{20} \right) = \mathbf{9}$  dla  $k = \mathbf{27}$

**2.** Podaj wartość granicy.

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{3n} \frac{k}{\sqrt{4n^4 + k}} = \mathbf{2}$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=7n+1}^{9n} \frac{k}{\sqrt{4n^4 + k}} = \mathbf{8}$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=3n+1}^{5n} \frac{k}{\sqrt{4n^4 + k}} = \mathbf{4}$

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=5n+1}^{7n} \frac{k}{\sqrt{4n^4 + k}} = \mathbf{6}$

**3.** Podaj wartość granicy.

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=3n+1}^{4n} \frac{kn}{\sqrt{9n^6 + k}} = \mathbf{7/6}$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{kn}{\sqrt{9n^6 + k}} = \mathbf{1/2}$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2n+1}^{3n} \frac{kn}{\sqrt{9n^6 + k}} = \mathbf{5/6}$

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=4n+1}^{5n} \frac{kn}{\sqrt{9n^6 + k}} = \mathbf{3/2}$

**4.** Niech  $G(k) = \sup \left\{ \frac{1}{k - 3^n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ . Wtedy:

a)  $G(90) = \mathbf{1/9}$

b)  $G(77) = \mathbf{1/50}$

c)  $G(99) = \mathbf{1/18}$

d)  $G(88) = \mathbf{1/7}$

5. Podaj kres dolny zbioru.

a)  $\inf \{x^2 + 2y : x, y \in (-3, 3)\} = -6$

b)  $\inf \{x^2 + 2x : x \in (-3, 3)\} = -1$

c)  $\inf \{x^2 + 4y : x, y \in (-3, 3)\} = -12$

d)  $\inf \{x^2 + 4x : x \in (-3, 3)\} = -4$

6. Podaj dziedzinę funkcji  $f$  określonej podanym wzorem.

a)  $f(x) = \sqrt{(x-1)^3 \cdot (x-2)^5 \cdot (x-3)^7}$ ,  $D_f = [1, 2] \cup [3, \infty)$

b)  $f(x) = \sqrt{(x-1)^4 \cdot (x-2)^6 \cdot (x-3)^7}$ ,  $D_f = \{1\} \cup \{2\} \cup [3, \infty)$

c)  $f(x) = \sqrt{(x-1)^3 \cdot (x-2)^5 \cdot (x-3)^8}$ ,  $D_f = (-\infty, 1] \cup [2, \infty)$

d)  $f(x) = \sqrt{(x-1)^3 \cdot (x-2)^6 \cdot (x-3)^7}$ ,  $D_f = (-\infty, 1] \cup \{2\} \cup [3, \infty)$

7. Podaj dziedzinę funkcji  $f$  określonej podanym wzorem.

a)  $f(x) = \log_7 \log_5 \log_3 |\log_2 x|$ ,  $D_f = (0, 1/8) \cup (8, \infty)$

b)  $f(x) = \log_2 \log_3 |\log_5 x|$ ,  $D_f = (0, 1/5) \cup (5, \infty)$

c)  $f(x) = \log_3 \log_5 |\log_7 x|$ ,  $D_f = (0, 1/7) \cup (7, \infty)$

d)  $f(x) = \log_5 \log_3 \log_2 |\log_7 x|$ ,  $D_f = (0, 1/49) \cup (49, \infty)$

8. Niech  $f(x) = x^2 + x$ . Podaj przeciwobrazy przedziałów.

a)  $f^{-1}[(2, 30)] = (-6, -2) \cup (1, 5)$

b)  $f^{-1}[(-30, 30)] = (-6, 5)$

c)  $f^{-1}[(0, 30)] = (-6, -1) \cup (0, 5)$

d)  $f^{-1}[(0, 2)] = (-2, -1) \cup (0, 1)$

**9.** Niech  $f(x) = x^3 + x$ . Podaj przeciwobrazy przedziałów.

a)  $f^{-1}[(2, 30)] = (\mathbf{1}, \mathbf{3})$

b)  $f^{-1}[(0, 2)] = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$

c)  $f^{-1}[(-30, 30)] = (\mathbf{-3}, \mathbf{3})$

d)  $f^{-1}[(0, 30)] = (\mathbf{0}, \mathbf{3})$

**10.** Dla podanej wartości  $b$  podaj takie  $a$ , aby funkcja  $f(x) = ax + \sqrt{bx^2 + 1}$  była odwrotna do samej siebie.

a)  $b = 8, \quad a = \mathbf{-3}$

b)  $b = 24, \quad a = \mathbf{-5}$

c)  $b = 15, \quad a = \mathbf{-4}$

d)  $b = 16, \quad a = \mathbf{-\sqrt{17}}$

**11.** Niech  $Z(a, b) = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge m^2 + an^2 \leq bmn \right\}$ . Podaj kresy.

a)  $\inf Z(15, 8) = \mathbf{3}$

b)  $\inf Z(8, 6) = \mathbf{2}$

c)  $\sup Z(8, 6) = \mathbf{4}$

d)  $\sup Z(15, 8) = \mathbf{5}$

**12.** To samo, co w zadaniu poprzednim.

a)  $\inf Z(40, 14) = \mathbf{4}$

b)  $\sup Z(40, 14) = \mathbf{10}$

c)  $\sup Z(21, 10) = \mathbf{7}$

d)  $\inf Z(21, 10) = \mathbf{3}$

**13.** Dla podanych liczb  $A$  i  $B$  podaj takie liczby naturalne  $n, k$ , że  $Bk \leq n$  oraz  $A \cdot \binom{n}{k} = \binom{n}{Bk}$ .

a)  $A = 5, \quad B = 7, \quad n = \mathbf{17}, \quad k = \mathbf{2}$

b)  $A = 7, \quad B = 9, \quad n = \mathbf{31}, \quad k = \mathbf{3}$

c)  $A = 9, \quad B = 11, \quad n = \mathbf{49}, \quad k = \mathbf{4}$

d)  $A = 3, \quad B = 5, \quad n = \mathbf{7}, \quad k = \mathbf{1}$