

ANALIZA 1

4 grudnia 2025 r., godz. 8:15–9:45

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadania 11, 12 i 13 to zadania dodatkowe.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Z ułamków nie trzeba wyłączać części całkowitej:
np. wystarczy podać $\frac{77}{3}$, ale $25\frac{2}{3}$ też będzie uznane.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry

NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

1. Podaj wartość granicy dla tak dobranego parametru k , aby granica ta była dodatnia i skończona.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \left(\sqrt{n^{60} + kn^{13}} - n^{30} \right) = \dots$ dla $k = \dots$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \left(\sqrt[3]{n^{60} + kn^{13}} - n^{20} \right) = \dots$ dla $k = \dots$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \left(\sqrt[4]{n^{60} + kn^{13}} - n^{15} \right) = \dots$ dla $k = \dots$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \left(\sqrt[5]{n^{60} + kn^{13}} - n^{12} \right) = \dots$ dla $k = \dots$

2. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=7n+1}^{9n} \frac{k}{\sqrt{4n^4 + k}} = \dots$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=5n+1}^{7n} \frac{k}{\sqrt{4n^4 + k}} = \dots$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=3n+1}^{5n} \frac{k}{\sqrt{4n^4 + k}} = \dots$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{3n} \frac{k}{\sqrt{4n^4 + k}} = \dots$

3. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2n+1}^{3n} \frac{kn}{\sqrt{9n^6 + k}} = \dots$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{kn}{\sqrt{9n^6 + k}} = \dots$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=4n+1}^{5n} \frac{kn}{\sqrt{9n^6 + k}} = \dots$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=3n+1}^{4n} \frac{kn}{\sqrt{9n^6 + k}} = \dots$

4. Niech $G(k) = \sup \left\{ \frac{1}{k - 3^n} : n \in \mathbb{N} \right\}$. Wtedy:

a) $G(77) = \dots$

b) $G(88) = \dots$

c) $G(99) = \dots$

d) $G(90) = \dots$

5. Podaj kres dolny zbioru.

a) $\inf \{x^2 + 2x : x \in (-3, 3)\} = \dots\dots\dots$

b) $\inf \{x^2 + 4x : x \in (-3, 3)\} = \dots\dots\dots$

c) $\inf \{x^2 + 2y : x, y \in (-3, 3)\} = \dots\dots\dots$

d) $\inf \{x^2 + 4y : x, y \in (-3, 3)\} = \dots\dots\dots$

6. Podaj dziedzinę funkcji f określonej podanym wzorem.

a) $f(x) = \sqrt{(x-1)^4 \cdot (x-2)^6 \cdot (x-3)^7}$, $D_f = \dots\dots\dots$

b) $f(x) = \sqrt{(x-1)^3 \cdot (x-2)^6 \cdot (x-3)^7}$, $D_f = \dots\dots\dots$

c) $f(x) = \sqrt{(x-1)^3 \cdot (x-2)^5 \cdot (x-3)^8}$, $D_f = \dots\dots\dots$

d) $f(x) = \sqrt{(x-1)^3 \cdot (x-2)^5 \cdot (x-3)^7}$, $D_f = \dots\dots\dots$

7. Podaj dziedzinę funkcji f określonej podanym wzorem.

a) $f(x) = \log_3 \log_5 |\log_7 x|$, $D_f = \dots\dots\dots$

b) $f(x) = \log_2 \log_3 |\log_5 x|$, $D_f = \dots\dots\dots$

c) $f(x) = \log_5 \log_3 \log_2 |\log_7 x|$, $D_f = \dots\dots\dots$

d) $f(x) = \log_7 \log_5 \log_3 |\log_2 x|$, $D_f = \dots\dots\dots$

8. Niech $f(x) = x^2 + x$. Podaj przeciwobrazy przedziałów.

a) $f^{-1}[(-30, 30)] = \dots\dots\dots$ b) $f^{-1}[(0, 2)] = \dots\dots\dots$

c) $f^{-1}[(0, 30)] = \dots\dots\dots$ d) $f^{-1}[(2, 30)] = \dots\dots\dots$

9. Niech $f(x) = x^3 + x$. Podaj przeciwobrazy przedziałów.

a) $f^{-1}[(0, 2)] = \dots\dots\dots$ b) $f^{-1}[(0, 30)] = \dots\dots\dots$

c) $f^{-1}[(2, 30)] = \dots\dots\dots$ d) $f^{-1}[(-30, 30)] = \dots\dots\dots$

10. Dla podanej wartości b podaj takie a , aby funkcja $f(x) = ax + \sqrt{bx^2 + 1}$ była odwrotna do samej siebie.

a) $b = 24, \quad a = \dots\dots\dots$ b) $b = 16, \quad a = \dots\dots\dots$

c) $b = 15, \quad a = \dots\dots\dots$ d) $b = 8, \quad a = \dots\dots\dots$

11. Niech $Z(a, b) = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge m^2 + an^2 \leqslant bmn \right\}$. Podaj kresy.

a) $\sup Z(8, 6) = \dots\dots\dots$ b) $\inf Z(8, 6) = \dots\dots\dots$

c) $\sup Z(15, 8) = \dots\dots\dots$ d) $\inf Z(15, 8) = \dots\dots\dots$

12. To samo, co w zadaniu poprzednim.

a) $\sup Z(40, 14) = \dots\dots\dots$ b) $\inf Z(21, 10) = \dots\dots\dots$

c) $\sup Z(21, 10) = \dots\dots\dots$ d) $\inf Z(40, 14) = \dots\dots\dots$

13. Dla podanych liczb A i B podaj takie liczby naturalne n, k , że $Bk \leqslant n$ oraz $A \cdot \binom{n}{k} = \binom{n}{Bk}$.

a) $A = 3, \quad B = 5, \quad n = \dots\dots\dots, \quad k = \dots\dots\dots$

b) $A = 7, \quad B = 9, \quad n = \dots\dots\dots, \quad k = \dots\dots\dots$

c) $A = 5, \quad B = 7, \quad n = \dots\dots\dots, \quad k = \dots\dots\dots$

d) $A = 9, \quad B = 11, \quad n = \dots\dots\dots, \quad k = \dots\dots\dots$