

KOŁOKWIUM nr **6, 18.12.2025**, godz. 8:15–9:45

Zadanie 9. (10 punktów)
Korzystając z **definicji** pochodnej wyprowadź wzór na pochodną funkcji f określonej wzorem $f(x) = \sqrt[8]{x}$ na przedziale $(0, +\infty)$.

Uwaga: Nie wolno używać reguły de l’Hospitala lub w inny sposób omijać bezpośrednie korzystanie z definicji pochodnej.

Rozwiązanie:
Stosując definicję pochodnej oraz wzór na różnicę ósmych potęg w postaci trzykrotnego wzoru na różnicę kwadratów otrzymujemy:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{\sqrt[8]{y} - \sqrt[8]{x}}{y - x} = \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{y - x}{\left(\sqrt[8]{x} + \sqrt[8]{y}\right) \cdot \left(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}\right) \cdot \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) \cdot (y - x)} = \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{1}{\left(\sqrt[8]{x} + \sqrt[8]{y}\right) \cdot \left(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}\right) \cdot \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)} = \\ &= \frac{1}{\left(\sqrt[8]{x} + \sqrt[8]{x}\right) \cdot \left(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{x}\right) \cdot \left(\sqrt{x} + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{(2 \cdot \sqrt[8]{x})(2 \cdot \sqrt[4]{x})(2 \cdot \sqrt{x})} = \frac{1}{8 \cdot \sqrt[8]{x^7}}. \end{aligned}$$

Zadanie **10.** (10 punktów)

Dana jest funkcja $f : [-8, 8] \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = x^8$. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leqslant 8^8 \cdot |x - y|.$$

Rozwiązanie:

Stosując wzór na różnicę ósmych potęg w postaci trzykrotnego wzoru na różnicę kwadratów, nierówność trójkąta oraz nierówności $|x|, |y| \leqslant 8$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |x^8 - y^8| = (x^4 + y^4) \cdot (x^2 + y^2) \cdot |x + y| \cdot |x - y| \leqslant \\ &\leqslant (x^4 + y^4) \cdot (x^2 + y^2) \cdot (|x| + |y|) \cdot |x - y| \leqslant (8^4 + 8^4) \cdot (8^2 + 8^2) \cdot (8 + 8) \cdot |x - y| = \\ &= (2 \cdot 8^4) \cdot (2 \cdot 8^2) \cdot (2 \cdot 8) \cdot |x - y| = 8^8 \cdot |x - y|. \end{aligned}$$

Zadanie 11. (10 punktów)

Wyznacz asymptoty funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \log_9(27^x + 3) .$$

Rozwiązanie:

Ponieważ funkcja jest ciągła na całej prostej, nie ma asymptot pionowych.

Szukamy asymptoty ukośnej/poziomej w $+\infty$.

$$\begin{aligned} a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_9(27^x + 3)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_9\left(27^x \cdot \left(1 + \frac{3}{27^x}\right)\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x}{2} + \log_9\left(1 + \frac{3}{27^x}\right)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2} + \frac{\log_9\left(1 + \frac{3}{27^x}\right)}{x} \right) = \frac{3}{2} + \frac{0}{\infty} = \frac{3}{2} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\log_9(27^x + 3) - \frac{3x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{2} + \log_9\left(1 + \frac{3}{27^x}\right) - \frac{3x}{2} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_9\left(1 + \frac{3}{27^x}\right) = 0 . \end{aligned}$$

Szukamy asymptoty ukośnej/poziomej w $-\infty$.

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\log_9(27^x + 3)}{x} = \frac{\log_9 3}{-\infty} = 0 , \\ b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \log_9(27^x + 3) = \log_9(0 + 3) = \frac{1}{2} . \end{aligned}$$

Odpowiedź: Funkcja ma w $+\infty$ asymptotę ukośną $y = \frac{3x}{2}$, a w $-\infty$ asymptotę poziomą $y = \frac{1}{2}$.

Zadanie **12.** (10 punktów)

Rozstrzygnij, w zależności od parametru naturalnego n , czy funkcja

$$f(x) = \sqrt[n]{\sqrt{x^n + 1} - 1}$$

jest różniczkowalna w zerze.

Rozwiązanie:

Obliczamy i porównujemy pochodne jednostronne w zerze:

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[n]{\sqrt{x^n + 1} - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[n]{\frac{\sqrt{x^n + 1} - 1}{x^n}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[n]{\frac{x^n}{x^n \cdot (\sqrt{x^n + 1} + 1)}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{x^n + 1} + 1}} = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}, \\ f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[n]{\sqrt{x^n + 1} - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[n]{\sqrt{x^n + 1} - 1}}{(-1)^{n+1} \cdot \sqrt[n]{x^n}} = \\ &= (-1)^{n+1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[n]{\frac{\sqrt{x^n + 1} - 1}{x^n}} = (-1)^{n+1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[n]{\frac{x^n}{x^n \cdot (\sqrt{x^n + 1} + 1)}} = \\ &= (-1)^{n+1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{x^n + 1} + 1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{2}}. \end{aligned}$$

W powyższych rachunkach skorzystaliśmy z tego, że dla ujemnych x zachodzą równości:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[n]{x^n} = (-1)^{n+1} \cdot \sqrt[n]{x^n} && \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ x &= -|x| = -\sqrt[n]{x^n} = (-1)^{n+1} \cdot \sqrt[n]{x^n} && \text{dla } n \text{ parzystych} \end{aligned}$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna w zerze wtedy i tylko wtedy, gdy n jest nieparzyste.

Zadanie **13.** (ZADANIE DODATKOWE za 15+25=40 punktów)
Za rozważania, które nie prowadzą do rozwiązania, otrzymasz ZERO punktów.
(a) Funkcja ciągła $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ jest odwrotna do samej siebie. Udowodnij istnienie takiej liczby rzeczywistej x , że $f(x)=x$.

(b) Wykaż (podając odpowiedni przykład), że założenie ciągłości w zadaniu (a) jest istotne.
Rozwiązanie:
(a) Niech $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą odwrotną do samej siebie. Jeżeli $f(0)=0$, to teza zadania jest spełniona. W przeciwnym razie $f(0)=x_0\neq 0$ i wówczas $f(x_0)=0$. Rozważmy funkcję pomocniczą g określoną wzorem

$$g(x)=f(x)-x.$$

Wtedy $g(0)=x_0$ oraz $g(x_0)=-x_0$. Ponieważ g jest funkcją ciągłą i w punktach 0 i x_0 przyjmuje wartości różnych znaków, to na mocy własności Darboux funkcji ciągłych, pomiędzy 0 i x_0 funkcja g przyjmuje wartość 0 , powiedzmy w punkcie c . Wobec tego

$$f(c)-c=g(c)=0,$$

czyli $f(c)=c$, co należało dowieść.

Uwaga terminologiczna: Każdy punkt x spełniający warunek $f(x)=x$ nazywamy **punktem stałym** funkcji f . Wobec tego tezę zadania można sformułować następująco: *Każda funkcja ciągła na całej prostej, odwrotna do samej siebie, ma punkt stały.*

(b) Zadanie polega na podaniu przykładu funkcji określonej na całej prostej, odwrotnej do samej siebie, bez punktów stałych.

Funkcja f określona wzorem

$$f(x)=x+(-1)^{[x]}\tag*{[x]=część całkowita x}$$

jest odwrotna do samej siebie, ale $f(x)\neq x$ dla każdego x .

Uzasadnienie poprawności powyższego przykładu:
1° $f(x)\neq x$, bo $f(x)-x=(-1)^{[x]}=\pm 1\neq 0$.
2° Funkcja f jest odwrotna do samej siebie, bo $f(x)=x\pm 1$, skąd wynika, że $[x]$ i $[f(x)]$ są kolejnymi liczbami całkowitymi (a więc o różnej parzystości). Wobec tego

$$(-1)^{[x]}=-(-1)^{[f(x)]}$$

i w konsekwencji

$$f(f(x))=f(x)+(-1)^{[f(x)]}=x+(-1)^{[x]}+(-1)^{[f(x)]}=x.$$

Wykres funkcji f można obejrzyć na stronie:
<https://www.desmos.com/calculator/umaxmu76ph>
Zwróć uwagę, że wykres jest symetryczny względem prostej $y=x$, ale nie ma z nią punktów wspólnych.

Uwaga: Istnieje nieskończenie wiele przykładów funkcji rozwiązujących zadanie (b), niekoniecznie opisanych zgrabnym wzorkiem – funkcję można także zdefiniować przez **precyzyjny** opis jej wykresu. Prawdopodobieństwo, że dwie osoby przedstawiające poprawne rozwiązanie podadzą dokładnie ten sam przykład jest wprawdzie dodatnie, ale małe. Trudno też oczekiwać, że rozwiązujący poda dokładnie taki przykład jak przedstawiony powyżej.

Inne przykłady:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ 1-x & \text{dla } x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

<https://www.desmos.com/calculator/vxaotbpwyd>

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ x + (-1)^x & \text{dla } x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

<https://www.desmos.com/calculator/zlacsqcbma>