

ANALIZA 1, KOŁOKWIUM nr **6**, **18.12.2025**, godz. 8:15–9:45

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOŁOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **9.** (10 punktów)

Korzystając z **definicji** pochodnej wyprowadź wzór na pochodną funkcji f określonej wzorem $f(x) = \sqrt[8]{x}$ na przedziale $(0, +\infty)$.

Uwaga: Nie wolno używać reguły de l'Hospitala lub w inny sposób omijać bezpośrednie korzystanie z definicji pochodnej.

Zadanie **10.** (10 punktów)

Dana jest funkcja $f : [-8, 8] \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = x^8$. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq 8^8 \cdot |x - y|.$$

Zadanie **11.** (10 punktów)

Wyznacz asymptoty funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \log_9(27^x + 3).$$

Zadanie **12.** (10 punktów)

Rozstrzygnij, w zależności od parametru naturalnego n , czy funkcja

$$f(x) = \sqrt[n]{\sqrt{x^n + 1} - 1}$$

jest różniczkowalna w zerze.

Zadanie **13.** (ZADANIE DODATKOWE za 15+25=40 punktów)

Za rozważania, które nie prowadzą do rozwiązania, otrzymasz ZERO punktów.

(a) Funkcja **ciągła** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest odwrotna do samej siebie. Udowodnij istnienie takiej liczby rzeczywistej x , że $f(x) = x$.

(b) Wykaż (podając odpowiedni przykład), że założenie ciągłości w zadaniu (a) jest istotne.