

ANALIZA 1

22 stycznia 2026 r., godz. 8:15–9:45

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadania 11, 12 i 13 to zadania dodatkowe.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Z ułamków nie trzeba wyłączać części całkowitej:
np. wystarczy podać $\frac{77}{3}$, ale $25\frac{2}{3}$ też będzie uznane.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry

NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

1. Dla podanej liczby naturalnej k podaj taką liczbę naturalną $n > k$, że
- $$\binom{n}{k} = \binom{n}{k+10}.$$

a) $k = 6, \quad n = \mathbf{22}$

b) $k = 7, \quad n = \mathbf{24}$

c) $k = 8, \quad n = \mathbf{26}$

d) $k = 9, \quad n = \mathbf{28}$

2. Niech $G(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2) + (n+4) + \dots + (n+2k) + \dots + an}{(n+1) + (n+2) + \dots + (n+k) + \dots + bn}.$

Wtedy

a) $G(7, 4) = \mathbf{8/5}$

b) $G(5, 4) = \mathbf{4/5}$

c) $G(7, 3) = \mathbf{3}$

d) $G(5, 3) = \mathbf{3/2}$

3. Podaj kresy zbiorów.

a) $\sup \left\{ \sqrt{n^2 + 4n + 3} - n : n \in \mathbb{N} \right\} = \mathbf{2}$

b) $\inf \left\{ \sqrt{n^2 + 4n + 3} - n : n \in \mathbb{N} \right\} = \mathbf{\sqrt{8} - 1}$

c) $\sup \left\{ \sqrt{n^2 + 4n + 5} - n : n \in \mathbb{N} \right\} = \mathbf{\sqrt{10} - 1}$

d) $\inf \left\{ \sqrt{n^2 + 4n + 5} - n : n \in \mathbb{N} \right\} = \mathbf{2}$

4. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=4n+1}^{6n} \frac{kn^3}{\sqrt{16n^{10} + k}} = \mathbf{5/2}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{9n} \frac{kn^3}{\sqrt{16n^{10} + k}} = \mathbf{10}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2n+1}^{8n} \frac{kn^3}{\sqrt{16n^{10} + k}} = \mathbf{15/2}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=3n+1}^{7n} \frac{kn^3}{\sqrt{16n^{10} + k}} = \mathbf{5}$

5. Podaj liczbę podzbiorów A zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ spełniających warunki $\forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (n+4) \in A)$ oraz

a) $4, 5, 6, 7 \in A$ **8**

b) $5, 6, 7, 8 \in A$ **16**

c) $6, 7, 8, 9 \in A$ **24**

d) $7, 8, 9, 10 \in A$ **36**

6. Niech $f_n(x) = \arctg\left(\sqrt[n]{x}\right)$. Podaj wzór na pochodną funkcji.

a) $f'_8(x) = \frac{1}{8 \cdot x^{7/8} \cdot \left(\sqrt[4]{x} + 1\right)}$

b) $f'_6(x) = \frac{1}{6 \cdot x^{5/6} \cdot \left(\sqrt[3]{x} + 1\right)}$

c) $f'_4(x) = \frac{1}{4 \cdot x^{3/4} \cdot \left(\sqrt{x} + 1\right)}$

d) $f'_2(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x} \cdot (x + 1)}$

7. Podaj wzór na pochodną drugiego rzędu.

a) $\frac{d^2}{dx^2} \sqrt[3]{4x+3} = -\frac{32}{9 \cdot (4x+3)^{5/3}}$

b) $\frac{d^2}{dx^2} \sqrt{5x+1} = -\frac{25}{4 \cdot (5x+1)^{3/2}}$

c) $\frac{d^2}{dx^2} \sqrt[5]{5x+2} = -\frac{4}{(5x+2)^{9/5}}$

d) $\frac{d^2}{dx^2} \sqrt[4]{2x+3} = -\frac{3}{4 \cdot (2x+3)^{7/4}}$

8. Niech $G(k, n) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{39x} - e^{kx}}{\ln(nx+1)}$. Wówczas:

a) $G(4, 7) = 5$

b) $G(7, 2) = 16$

c) $G(6, 3) = 11$

d) $G(5, 5) = 34/5$

9. Niech a_k i b_k będą takimi liczbami, że prosta o równaniu $y = a_k x + b_k$ jest styczna w punkcie $(k, k \cdot \sqrt{k})$ do krzywej o równaniu $y = x \cdot \sqrt{x}$. Wówczas:

a) $a_1 = 3/2$ $b_1 = -1/2$

b) $a_9 = 9/2$ $b_9 = -27/2$

c) $a_4 = 3$ $b_4 = -4$

d) $a_{16} = 6$ $b_{16} = -32$

10. Niech g będzie funkcją odwrotną do funkcji $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem $f(x) = x^2 + 3x$. Podaj wartość pochodnej.

a) $g'(0) = \mathbf{1/3}$

b) $g'(4) = \mathbf{1/5}$

c) $g'(18) = \mathbf{1/9}$

d) $g'(70) = \mathbf{1/17}$

11. Niech $A = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge m^{2n} \geq 2^m \cdot n^{2n} \right\}$
oraz $B = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^{8m} \cdot m^{9n} \geq 3^{8m} \cdot n^{9n} \right\}$. Podaj kresy.

a) $\sup B = \mathbf{27/8}$

b) $\inf B = \mathbf{9/4}$

c) $\sup A = \mathbf{4}$

d) $\inf A = \mathbf{2}$

12. Niech $C = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3^{81m} \cdot m^{64n} \geq 2^{162m} \cdot n^{64n} \right\}$
oraz $D = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^{2048m} \cdot m^{625n} \geq 5^{1024m} \cdot n^{625n} \right\}$. Podaj kresy.

a) $\sup C = \mathbf{256/81}$

b) $\inf C = \mathbf{64/27}$

c) $\sup D = \mathbf{3125/1024}$

d) $\inf D = \mathbf{625/256}$

13. Dla podanych liczb A , B i C podaj takie liczby naturalne n , k , że $k+2 \leq n$ oraz $A \cdot \binom{n}{k} = B \cdot \binom{n}{k+1} = C \cdot \binom{n}{k+2}$.

a) $A = 7, B = 2, C = 1, n = \mathbf{8}, k = \mathbf{1}$

b) $A = 10, B = 3, C = 1, n = \mathbf{51}, k = \mathbf{11}$

c) $A = 12, B = 3, C = 1, n = \mathbf{19}, k = \mathbf{3}$

d) $A = 7, B = 3, C = 2, n = \mathbf{9}, k = \mathbf{2}$

ANALIZA 1

22 stycznia 2026 r., godz. 8:15–9:45

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadania 11, 12 i 13 to zadania dodatkowe.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Z ułamków nie trzeba wyłączać części całkowitej:
np. wystarczy podać $\frac{77}{3}$, ale $25\frac{2}{3}$ też będzie uznane.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry

NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

1. Dla podanej liczby naturalnej k podaj taką liczbę naturalną $n > k$, że

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k+10}.$$

a) $k = 8, \quad n = \mathbf{26}$

b) $k = 7, \quad n = \mathbf{24}$

c) $k = 6, \quad n = \mathbf{22}$

d) $k = 9, \quad n = \mathbf{28}$

2. Niech $G(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2) + (n+4) + \dots + (n+2k) + \dots + an}{(n+1) + (n+2) + \dots + (n+k) + \dots + bn}$.

Wtedy

a) $G(5, 3) = \mathbf{3/2}$

b) $G(7, 3) = \mathbf{3}$

c) $G(7, 4) = \mathbf{8/5}$

d) $G(5, 4) = \mathbf{4/5}$

3. Podaj kresy zbiorów.

a) $\sup \left\{ \sqrt{n^2 + 4n + 5} - n : n \in \mathbb{N} \right\} = \mathbf{\sqrt{10} - 1}$

b) $\sup \left\{ \sqrt{n^2 + 4n + 3} - n : n \in \mathbb{N} \right\} = \mathbf{2}$

c) $\inf \left\{ \sqrt{n^2 + 4n + 3} - n : n \in \mathbb{N} \right\} = \mathbf{\sqrt{8} - 1}$

d) $\inf \left\{ \sqrt{n^2 + 4n + 5} - n : n \in \mathbb{N} \right\} = \mathbf{2}$

4. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=4n+1}^{6n} \frac{kn^3}{\sqrt{16n^{10} + k}} = \mathbf{5/2}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=3n+1}^{7n} \frac{kn^3}{\sqrt{16n^{10} + k}} = \mathbf{5}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2n+1}^{8n} \frac{kn^3}{\sqrt{16n^{10} + k}} = \mathbf{15/2}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{9n} \frac{kn^3}{\sqrt{16n^{10} + k}} = \mathbf{10}$

5. Podaj liczbę podzbiorów A zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ spełniających warunki $\forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (n+4) \in A)$ oraz

a) $6, 7, 8, 9 \in A$ **24**

b) $5, 6, 7, 8 \in A$ **16**

c) $4, 5, 6, 7 \in A$ **8**

d) $7, 8, 9, 10 \in A$ **36**

6. Niech $f_n(x) = \arctg\left(\sqrt[n]{x}\right)$. Podaj wzór na pochodną funkcji.

a) $f_2'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x} \cdot (x+1)}$

b) $f_4'(x) = \frac{1}{4 \cdot x^{3/4} \cdot (\sqrt{x}+1)}$

c) $f_8'(x) = \frac{1}{8 \cdot x^{7/8} \cdot (\sqrt[4]{x}+1)}$

d) $f_6'(x) = \frac{1}{6 \cdot x^{5/6} \cdot (\sqrt[3]{x}+1)}$

7. Podaj wzór na pochodną drugiego rzędu.

a) $\frac{d^2}{dx^2} \sqrt[5]{5x+2} = -\frac{4}{(5x+2)^{9/5}}$

b) $\frac{d^2}{dx^2} \sqrt[3]{4x+3} = -\frac{32}{9 \cdot (4x+3)^{5/3}}$

c) $\frac{d^2}{dx^2} \sqrt{5x+1} = -\frac{25}{4 \cdot (5x+1)^{3/2}}$

d) $\frac{d^2}{dx^2} \sqrt[4]{2x+3} = -\frac{3}{4 \cdot (2x+3)^{7/4}}$

8. Niech $G(k, n) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{39x} - e^{kx}}{\ln(nx+1)}$. Wówczas:

a) $G(4, 7) = 5$

b) $G(5, 5) = 34/5$

c) $G(6, 3) = 11$

d) $G(7, 2) = 16$

9. Niech a_k i b_k będą takimi liczbami, że prosta o równaniu $y = a_k x + b_k$ jest styczna w punkcie $(k, k \cdot \sqrt{k})$ do krzywej o równaniu $y = x \cdot \sqrt{x}$. Wówczas:

a) $a_{16} = 6$ $b_{16} = -32$

b) $a_9 = 9/2$ $b_9 = -27/2$

c) $a_4 = 3$ $b_4 = -4$

d) $a_1 = 3/2$ $b_1 = -1/2$

10. Niech g będzie funkcją odwrotną do funkcji $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem $f(x) = x^2 + 3x$. Podaj wartość pochodnej.

a) $g'(18) = \mathbf{1/9}$

b) $g'(4) = \mathbf{1/5}$

c) $g'(0) = \mathbf{1/3}$

d) $g'(70) = \mathbf{1/17}$

11. Niech $A = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge m^{2n} \geq 2^m \cdot n^{2n} \right\}$
oraz $B = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^{8m} \cdot m^{9n} \geq 3^{8m} \cdot n^{9n} \right\}$. Podaj kresy.

a) $\inf A = \mathbf{2}$

b) $\sup A = \mathbf{4}$

c) $\sup B = \mathbf{27/8}$

d) $\inf B = \mathbf{9/4}$

12. Niech $C = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3^{81m} \cdot m^{64n} \geq 2^{162m} \cdot n^{64n} \right\}$
oraz $D = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^{2048m} \cdot m^{625n} \geq 5^{1024m} \cdot n^{625n} \right\}$. Podaj kresy.

a) $\sup D = \mathbf{3125/1024}$

b) $\sup C = \mathbf{256/81}$

c) $\inf C = \mathbf{64/27}$

d) $\inf D = \mathbf{625/256}$

13. Dla podanych liczb A , B i C podaj takie liczby naturalne n , k , że $k+2 \leq n$ oraz $A \cdot \binom{n}{k} = B \cdot \binom{n}{k+1} = C \cdot \binom{n}{k+2}$.

a) $A = 7, B = 2, C = 1, n = \mathbf{8}, k = \mathbf{1}$

b) $A = 7, B = 3, C = 2, n = \mathbf{9}, k = \mathbf{2}$

c) $A = 12, B = 3, C = 1, n = \mathbf{19}, k = \mathbf{3}$

d) $A = 10, B = 3, C = 1, n = \mathbf{51}, k = \mathbf{11}$

ANALIZA 1

22 stycznia 2026 r., godz. 8:15–9:45

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadania 11, 12 i 13 to zadania dodatkowe.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Z ułamków nie trzeba wyłączać części całkowitej:
np. wystarczy podać $\frac{77}{3}$, ale $25\frac{2}{3}$ też będzie uznane.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry

NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

1. Dla podanej liczby naturalnej k podaj taką liczbę naturalną $n > k$, że

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k+10}.$$

a) $k = 8, \quad n = \mathbf{26}$

b) $k = 6, \quad n = \mathbf{22}$

c) $k = 9, \quad n = \mathbf{28}$

d) $k = 7, \quad n = \mathbf{24}$

2. Niech $G(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2) + (n+4) + \dots + (n+2k) + \dots + an}{(n+1) + (n+2) + \dots + (n+k) + \dots + bn}.$

Wtedy

a) $G(7, 4) = \mathbf{8/5}$

b) $G(7, 3) = \mathbf{3}$

c) $G(5, 3) = \mathbf{3/2}$

d) $G(5, 4) = \mathbf{4/5}$

3. Podaj kresy zbiorów.

a) $\inf \left\{ \sqrt{n^2 + 4n + 3} - n : n \in \mathbb{N} \right\} = \mathbf{\sqrt{8} - 1}$

b) $\sup \left\{ \sqrt{n^2 + 4n + 3} - n : n \in \mathbb{N} \right\} = \mathbf{2}$

c) $\sup \left\{ \sqrt{n^2 + 4n + 5} - n : n \in \mathbb{N} \right\} = \mathbf{\sqrt{10} - 1}$

d) $\inf \left\{ \sqrt{n^2 + 4n + 5} - n : n \in \mathbb{N} \right\} = \mathbf{2}$

4. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=4n+1}^{6n} \frac{kn^3}{\sqrt{16n^{10} + k}} = \mathbf{5/2}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2n+1}^{8n} \frac{kn^3}{\sqrt{16n^{10} + k}} = \mathbf{15/2}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=3n+1}^{7n} \frac{kn^3}{\sqrt{16n^{10} + k}} = \mathbf{5}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{9n} \frac{kn^3}{\sqrt{16n^{10} + k}} = \mathbf{10}$

5. Podaj liczbę podzbiorów A zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ spełniających warunki $\forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (n+4) \in A)$ oraz

a) $6, 7, 8, 9 \in A$ **24**

b) $4, 5, 6, 7 \in A$ **8**

c) $7, 8, 9, 10 \in A$ **36**

d) $5, 6, 7, 8 \in A$ **16**

6. Niech $f_n(x) = \arctg\left(\sqrt[n]{x}\right)$. Podaj wzór na pochodną funkcji.

a) $f'_8(x) = \frac{1}{8 \cdot x^{7/8} \cdot \left(\sqrt[4]{x} + 1\right)}$

b) $f'_4(x) = \frac{1}{4 \cdot x^{3/4} \cdot \left(\sqrt{x} + 1\right)}$

c) $f'_2(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x} \cdot (x + 1)}$

d) $f'_6(x) = \frac{1}{6 \cdot x^{5/6} \cdot \left(\sqrt[3]{x} + 1\right)}$

7. Podaj wzór na pochodną drugiego rzędu.

a) $\frac{d^2}{dx^2} \sqrt{5x+1} = -\frac{25}{4 \cdot (5x+1)^{3/2}}$

b) $\frac{d^2}{dx^2} \sqrt[3]{4x+3} = -\frac{32}{9 \cdot (4x+3)^{5/3}}$

c) $\frac{d^2}{dx^2} \sqrt[5]{5x+2} = -\frac{4}{(5x+2)^{9/5}}$

d) $\frac{d^2}{dx^2} \sqrt[4]{2x+3} = -\frac{3}{4 \cdot (2x+3)^{7/4}}$

8. Niech $G(k, n) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{39x} - e^{kx}}{\ln(nx+1)}$. Wówczas:

a) $G(4, 7) = 5$

b) $G(6, 3) = 11$

c) $G(5, 5) = 34/5$

d) $G(7, 2) = 16$

9. Niech a_k i b_k będą takimi liczbami, że prosta o równaniu $y = a_k x + b_k$ jest styczna w punkcie $(k, k \cdot \sqrt{k})$ do krzywej o równaniu $y = x \cdot \sqrt{x}$. Wówczas:

a) $a_4 = 3$ $b_4 = -4$

b) $a_1 = 3/2$ $b_1 = -1/2$

c) $a_{16} = 6$ $b_{16} = -32$

d) $a_9 = 9/2$ $b_9 = -27/2$

10. Niech g będzie funkcją odwrotną do funkcji $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem $f(x) = x^2 + 3x$. Podaj wartość pochodnej.

a) $g'(18) = \mathbf{1/9}$

b) $g'(0) = \mathbf{1/3}$

c) $g'(70) = \mathbf{1/17}$

d) $g'(4) = \mathbf{1/5}$

11. Niech $A = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge m^{2n} \geq 2^m \cdot n^{2n} \right\}$
oraz $B = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^{8m} \cdot m^{9n} \geq 3^{8m} \cdot n^{9n} \right\}$. Podaj kresy.

a) $\sup B = \mathbf{27/8}$

b) $\sup A = \mathbf{4}$

c) $\inf A = \mathbf{2}$

d) $\inf B = \mathbf{9/4}$

12. Niech $C = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3^{81m} \cdot m^{64n} \geq 2^{162m} \cdot n^{64n} \right\}$
oraz $D = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^{2048m} \cdot m^{625n} \geq 5^{1024m} \cdot n^{625n} \right\}$. Podaj kresy.

a) $\inf C = \mathbf{64/27}$

b) $\sup C = \mathbf{256/81}$

c) $\sup D = \mathbf{3125/1024}$

d) $\inf D = \mathbf{625/256}$

13. Dla podanych liczb A , B i C podaj takie liczby naturalne n , k , że $k+2 \leq n$ oraz $A \cdot \binom{n}{k} = B \cdot \binom{n}{k+1} = C \cdot \binom{n}{k+2}$.

a) $A = 7, B = 2, C = 1, n = \mathbf{8}, k = \mathbf{1}$

b) $A = 12, B = 3, C = 1, n = \mathbf{19}, k = \mathbf{3}$

c) $A = 7, B = 3, C = 2, n = \mathbf{9}, k = \mathbf{2}$

d) $A = 10, B = 3, C = 1, n = \mathbf{51}, k = \mathbf{11}$

ANALIZA 1

22 stycznia 2026 r., godz. 8:15–9:45

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadania 11, 12 i 13 to zadania dodatkowe.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Z ułamków nie trzeba wyłączać części całkowitej:
np. wystarczy podać $\frac{77}{3}$, ale $25\frac{2}{3}$ też będzie uznane.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry

NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

1. Dla podanej liczby naturalnej k podaj taką liczbę naturalną $n > k$, że
- $$\binom{n}{k} = \binom{n}{k+10}.$$

a) $k = 6, \quad n = \mathbf{22}$

b) $k = 9, \quad n = \mathbf{28}$

c) $k = 7, \quad n = \mathbf{24}$

d) $k = 8, \quad n = \mathbf{26}$

2. Niech $G(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2) + (n+4) + \dots + (n+2k) + \dots + an}{(n+1) + (n+2) + \dots + (n+k) + \dots + bn}.$

Wtedy

a) $G(7, 4) = \mathbf{8/5}$

b) $G(5, 3) = \mathbf{3/2}$

c) $G(5, 4) = \mathbf{4/5}$

d) $G(7, 3) = \mathbf{3}$

3. Podaj kresy zbiorów.

a) $\sup \left\{ \sqrt{n^2 + 4n + 5} - n : n \in \mathbb{N} \right\} = \mathbf{\sqrt{10} - 1}$

b) $\sup \left\{ \sqrt{n^2 + 4n + 3} - n : n \in \mathbb{N} \right\} = \mathbf{2}$

c) $\inf \left\{ \sqrt{n^2 + 4n + 5} - n : n \in \mathbb{N} \right\} = \mathbf{2}$

d) $\inf \left\{ \sqrt{n^2 + 4n + 3} - n : n \in \mathbb{N} \right\} = \mathbf{\sqrt{8} - 1}$

4. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=4n+1}^{6n} \frac{kn^3}{\sqrt{16n^{10} + k}} = \mathbf{5/2}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=3n+1}^{7n} \frac{kn^3}{\sqrt{16n^{10} + k}} = \mathbf{5}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{9n} \frac{kn^3}{\sqrt{16n^{10} + k}} = \mathbf{10}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2n+1}^{8n} \frac{kn^3}{\sqrt{16n^{10} + k}} = \mathbf{15/2}$

5. Podaj liczbę podzbiorów A zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ spełniających warunki $\forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (n+4) \in A)$ oraz

a) $4, 5, 6, 7 \in A$ **8**

b) $7, 8, 9, 10 \in A$ **36**

c) $5, 6, 7, 8 \in A$ **16**

d) $6, 7, 8, 9 \in A$ **24**

6. Niech $f_n(x) = \arctg\left(\sqrt[n]{x}\right)$. Podaj wzór na pochodną funkcji.

a) $f'_8(x) = \frac{1}{8 \cdot x^{7/8} \cdot \left(\sqrt[4]{x} + 1\right)}$

b) $f'_2(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x} \cdot (x+1)}$

c) $f'_6(x) = \frac{1}{6 \cdot x^{5/6} \cdot \left(\sqrt[3]{x} + 1\right)}$

d) $f'_4(x) = \frac{1}{4 \cdot x^{3/4} \cdot \left(\sqrt{x} + 1\right)}$

7. Podaj wzór na pochodną drugiego rzędu.

a) $\frac{d^2}{dx^2} \sqrt[5]{5x+2} = -\frac{4}{(5x+2)^{9/5}}$

b) $\frac{d^2}{dx^2} \sqrt[3]{4x+3} = -\frac{32}{9 \cdot (4x+3)^{5/3}}$

c) $\frac{d^2}{dx^2} \sqrt[4]{2x+3} = -\frac{3}{4 \cdot (2x+3)^{7/4}}$

d) $\frac{d^2}{dx^2} \sqrt{5x+1} = -\frac{25}{4 \cdot (5x+1)^{3/2}}$

8. Niech $G(k, n) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{39x} - e^{kx}}{\ln(nx+1)}$. Wówczas:

a) $G(4, 7) = 5$

b) $G(5, 5) = 34/5$

c) $G(7, 2) = 16$

d) $G(6, 3) = 11$

9. Niech a_k i b_k będą takimi liczbami, że prosta o równaniu $y = a_k x + b_k$ jest styczna w punkcie $(k, k \cdot \sqrt{k})$ do krzywej o równaniu $y = x \cdot \sqrt{x}$. Wówczas:

a) $a_4 = 3$ $b_4 = -4$

b) $a_1 = 3/2$ $b_1 = -1/2$

c) $a_9 = 9/2$ $b_9 = -27/2$

d) $a_{16} = 6$ $b_{16} = -32$

10. Niech g będzie funkcją odwrotną do funkcji $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem $f(x) = x^2 + 3x$. Podaj wartość pochodnej.

a) $g'(0) = \mathbf{1/3}$

b) $g'(70) = \mathbf{1/17}$

c) $g'(4) = \mathbf{1/5}$

d) $g'(18) = \mathbf{1/9}$

11. Niech $A = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge m^{2n} \geq 2^m \cdot n^{2n} \right\}$
oraz $B = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^{8m} \cdot m^{9n} \geq 3^{8m} \cdot n^{9n} \right\}$. Podaj kresy.

a) $\sup B = \mathbf{27/8}$

b) $\inf A = \mathbf{2}$

c) $\inf B = \mathbf{9/4}$

d) $\sup A = \mathbf{4}$

12. Niech $C = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3^{81m} \cdot m^{64n} \geq 2^{162m} \cdot n^{64n} \right\}$
oraz $D = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^{2048m} \cdot m^{625n} \geq 5^{1024m} \cdot n^{625n} \right\}$. Podaj kresy.

a) $\sup D = \mathbf{3125/1024}$

b) $\sup C = \mathbf{256/81}$

c) $\inf D = \mathbf{625/256}$

d) $\inf C = \mathbf{64/27}$

13. Dla podanych liczb A , B i C podaj takie liczby naturalne n , k , że $k+2 \leq n$ oraz $A \cdot \binom{n}{k} = B \cdot \binom{n}{k+1} = C \cdot \binom{n}{k+2}$.

a) $A = 7, B = 2, C = 1, n = \mathbf{8}, k = \mathbf{1}$

b) $A = 7, B = 3, C = 2, n = \mathbf{9}, k = \mathbf{2}$

c) $A = 10, B = 3, C = 1, n = \mathbf{51}, k = \mathbf{11}$

d) $A = 12, B = 3, C = 1, n = \mathbf{19}, k = \mathbf{3}$

ANALIZA 1

22 stycznia 2026 r., godz. 8:15–9:45

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadania 11, 12 i 13 to zadania dodatkowe.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Z ułamków nie trzeba wyłączać części całkowitej:
np. wystarczy podać $\frac{77}{3}$, ale $25\frac{2}{3}$ też będzie uznane.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry

NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

1. Dla podanej liczby naturalnej k podaj taką liczbę naturalną $n > k$, że

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k+10}.$$

a) $k = 7, \quad n = \mathbf{24}$

b) $k = 6, \quad n = \mathbf{22}$

c) $k = 8, \quad n = \mathbf{26}$

d) $k = 9, \quad n = \mathbf{28}$

2. Niech $G(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2) + (n+4) + \dots + (n+2k) + \dots + an}{(n+1) + (n+2) + \dots + (n+k) + \dots + bn}.$

Wtedy

a) $G(7, 3) = \mathbf{3}$

b) $G(5, 4) = \mathbf{4/5}$

c) $G(5, 3) = \mathbf{3/2}$

d) $G(7, 4) = \mathbf{8/5}$

3. Podaj kresy zbiorów.

a) $\inf \left\{ \sqrt{n^2 + 4n + 5} - n : n \in \mathbb{N} \right\} = \mathbf{2}$

b) $\sup \left\{ \sqrt{n^2 + 4n + 3} - n : n \in \mathbb{N} \right\} = \mathbf{2}$

c) $\sup \left\{ \sqrt{n^2 + 4n + 5} - n : n \in \mathbb{N} \right\} = \mathbf{\sqrt{10} - 1}$

d) $\inf \left\{ \sqrt{n^2 + 4n + 3} - n : n \in \mathbb{N} \right\} = \mathbf{\sqrt{8} - 1}$

4. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2n+1}^{8n} \frac{kn^3}{\sqrt{16n^{10} + k}} = \mathbf{15/2}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=3n+1}^{7n} \frac{kn^3}{\sqrt{16n^{10} + k}} = \mathbf{5}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=4n+1}^{6n} \frac{kn^3}{\sqrt{16n^{10} + k}} = \mathbf{5/2}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{9n} \frac{kn^3}{\sqrt{16n^{10} + k}} = \mathbf{10}$

5. Podaj liczbę podzbiorów A zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ spełniających warunki $\forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (n+4) \in A)$ oraz

a) $5, 6, 7, 8 \in A$ **16**

b) $4, 5, 6, 7 \in A$ **8**

c) $6, 7, 8, 9 \in A$ **24**

d) $7, 8, 9, 10 \in A$ **36**

6. Niech $f_n(x) = \arctg\left(\sqrt[n]{x}\right)$. Podaj wzór na pochodną funkcji.

a) $f_4'(x) = \frac{1}{4 \cdot x^{3/4} \cdot (\sqrt{x} + 1)}$

b) $f_6'(x) = \frac{1}{6 \cdot x^{5/6} \cdot (\sqrt[3]{x} + 1)}$

c) $f_2'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x} \cdot (x + 1)}$

d) $f_8'(x) = \frac{1}{8 \cdot x^{7/8} \cdot (\sqrt[4]{x} + 1)}$

7. Podaj wzór na pochodną drugiego rzędu.

a) $\frac{d^2}{dx^2} \sqrt[4]{2x+3} = -\frac{3}{4 \cdot (2x+3)^{7/4}}$

b) $\frac{d^2}{dx^2} \sqrt[3]{4x+3} = -\frac{32}{9 \cdot (4x+3)^{5/3}}$

c) $\frac{d^2}{dx^2} \sqrt[5]{5x+2} = -\frac{4}{(5x+2)^{9/5}}$

d) $\frac{d^2}{dx^2} \sqrt{5x+1} = -\frac{25}{4 \cdot (5x+1)^{3/2}}$

8. Niech $G(k, n) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{39x} - e^{kx}}{\ln(nx+1)}$. Wówczas:

a) $G(6, 3) = 11$

b) $G(5, 5) = 34/5$

c) $G(4, 7) = 5$

d) $G(7, 2) = 16$

9. Niech a_k i b_k będą takimi liczbami, że prosta o równaniu $y = a_k x + b_k$ jest styczna w punkcie $(k, k \cdot \sqrt{k})$ do krzywej o równaniu $y = x \cdot \sqrt{x}$. Wówczas:

a) $a_9 = 9/2$ $b_9 = -27/2$

b) $a_{16} = 6$ $b_{16} = -32$

c) $a_1 = 3/2$ $b_1 = -1/2$

d) $a_4 = 3$ $b_4 = -4$

10. Niech g będzie funkcją odwrotną do funkcji $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem $f(x) = x^2 + 3x$. Podaj wartość pochodnej.

a) $g'(4) = \mathbf{1/5}$

b) $g'(0) = \mathbf{1/3}$

c) $g'(18) = \mathbf{1/9}$

d) $g'(70) = \mathbf{1/17}$

11. Niech $A = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge m^{2n} \geq 2^m \cdot n^{2n} \right\}$
oraz $B = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^{8m} \cdot m^{9n} \geq 3^{8m} \cdot n^{9n} \right\}$. Podaj kresy.

a) $\sup A = \mathbf{4}$

b) $\inf B = \mathbf{9/4}$

c) $\inf A = \mathbf{2}$

d) $\sup B = \mathbf{27/8}$

12. Niech $C = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3^{81m} \cdot m^{64n} \geq 2^{162m} \cdot n^{64n} \right\}$
oraz $D = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^{2048m} \cdot m^{625n} \geq 5^{1024m} \cdot n^{625n} \right\}$. Podaj kresy.

a) $\inf D = \mathbf{625/256}$

b) $\sup C = \mathbf{256/81}$

c) $\sup D = \mathbf{3125/1024}$

d) $\inf C = \mathbf{64/27}$

13. Dla podanych liczb A , B i C podaj takie liczby naturalne n , k , że $k+2 \leq n$ oraz $A \cdot \binom{n}{k} = B \cdot \binom{n}{k+1} = C \cdot \binom{n}{k+2}$.

a) $A = 12, B = 3, C = 1, n = \mathbf{19}, k = \mathbf{3}$

b) $A = 7, B = 3, C = 2, n = \mathbf{9}, k = \mathbf{2}$

c) $A = 7, B = 2, C = 1, n = \mathbf{8}, k = \mathbf{1}$

d) $A = 10, B = 3, C = 1, n = \mathbf{51}, k = \mathbf{11}$

ANALIZA 1

22 stycznia 2026 r., godz. 8:15–9:45

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadania 11, 12 i 13 to zadania dodatkowe.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Z ułamków nie trzeba wyłączać części całkowitej:
np. wystarczy podać $\frac{77}{3}$, ale $25\frac{2}{3}$ też będzie uznane.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry

NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

1. Dla podanej liczby naturalnej k podaj taką liczbę naturalną $n > k$, że

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k+10}.$$

a) $k = 8, \quad n = \mathbf{26}$

b) $k = 6, \quad n = \mathbf{22}$

c) $k = 9, \quad n = \mathbf{28}$

d) $k = 7, \quad n = \mathbf{24}$

2. Niech $G(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2) + (n+4) + \dots + (n+2k) + \dots + an}{(n+1) + (n+2) + \dots + (n+k) + \dots + bn}.$

Wtedy

a) $G(5, 3) = \mathbf{3/2}$

b) $G(7, 4) = \mathbf{8/5}$

c) $G(7, 3) = \mathbf{3}$

d) $G(5, 4) = \mathbf{4/5}$

3. Podaj kresy zbiorów.

a) $\inf \left\{ \sqrt{n^2 + 4n + 5} - n : n \in \mathbb{N} \right\} = \mathbf{2}$

b) $\inf \left\{ \sqrt{n^2 + 4n + 3} - n : n \in \mathbb{N} \right\} = \mathbf{\sqrt{8} - 1}$

c) $\sup \left\{ \sqrt{n^2 + 4n + 3} - n : n \in \mathbb{N} \right\} = \mathbf{2}$

d) $\sup \left\{ \sqrt{n^2 + 4n + 5} - n : n \in \mathbb{N} \right\} = \mathbf{\sqrt{10} - 1}$

4. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=3n+1}^{7n} \frac{kn^3}{\sqrt{16n^{10} + k}} = \mathbf{5}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=4n+1}^{6n} \frac{kn^3}{\sqrt{16n^{10} + k}} = \mathbf{5/2}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2n+1}^{8n} \frac{kn^3}{\sqrt{16n^{10} + k}} = \mathbf{15/2}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{9n} \frac{kn^3}{\sqrt{16n^{10} + k}} = \mathbf{10}$

5. Podaj liczbę podzbiorów A zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ spełniających warunki $\forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (n+4) \in A)$ oraz

a) $6, 7, 8, 9 \in A$ **24**

b) $4, 5, 6, 7 \in A$ **8**

c) $7, 8, 9, 10 \in A$ **36**

d) $5, 6, 7, 8 \in A$ **16**

6. Niech $f_n(x) = \arctg\left(\sqrt[n]{x}\right)$. Podaj wzór na pochodną funkcji.

a) $f_2'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x} \cdot (x+1)}$

b) $f_8'(x) = \frac{1}{8 \cdot x^{7/8} \cdot (\sqrt[4]{x} + 1)}$

c) $f_4'(x) = \frac{1}{4 \cdot x^{3/4} \cdot (\sqrt{x} + 1)}$

d) $f_6'(x) = \frac{1}{6 \cdot x^{5/6} \cdot (\sqrt[3]{x} + 1)}$

7. Podaj wzór na pochodną drugiego rzędu.

a) $\frac{d^2}{dx^2} \sqrt[4]{2x+3} = -\frac{3}{4 \cdot (2x+3)^{7/4}}$

b) $\frac{d^2}{dx^2} \sqrt{5x+1} = -\frac{25}{4 \cdot (5x+1)^{3/2}}$

c) $\frac{d^2}{dx^2} \sqrt[3]{4x+3} = -\frac{32}{9 \cdot (4x+3)^{5/3}}$

d) $\frac{d^2}{dx^2} \sqrt[5]{5x+2} = -\frac{4}{(5x+2)^{9/5}}$

8. Niech $G(k, n) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{39x} - e^{kx}}{\ln(nx+1)}$. Wówczas:

a) $G(5, 5) = 34/5$

b) $G(4, 7) = 5$

c) $G(6, 3) = 11$

d) $G(7, 2) = 16$

9. Niech a_k i b_k będą takimi liczbami, że prosta o równaniu $y = a_k x + b_k$ jest styczna w punkcie $(k, k \cdot \sqrt{k})$ do krzywej o równaniu $y = x \cdot \sqrt{x}$. Wówczas:

a) $a_4 = 3$ $b_4 = -4$

b) $a_9 = 9/2$ $b_9 = -27/2$

c) $a_{16} = 6$ $b_{16} = -32$

d) $a_1 = 3/2$ $b_1 = -1/2$

10. Niech g będzie funkcją odwrotną do funkcji $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem $f(x) = x^2 + 3x$. Podaj wartość pochodnej.

a) $g'(18) = \mathbf{1/9}$

b) $g'(0) = \mathbf{1/3}$

c) $g'(70) = \mathbf{1/17}$

d) $g'(4) = \mathbf{1/5}$

11. Niech $A = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge m^{2n} \geq 2^m \cdot n^{2n} \right\}$
oraz $B = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^{8m} \cdot m^{9n} \geq 3^{8m} \cdot n^{9n} \right\}$. Podaj kresy.

a) $\inf A = \mathbf{2}$

b) $\sup B = \mathbf{27/8}$

c) $\sup A = \mathbf{4}$

d) $\inf B = \mathbf{9/4}$

12. Niech $C = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3^{81m} \cdot m^{64n} \geq 2^{162m} \cdot n^{64n} \right\}$
oraz $D = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^{2048m} \cdot m^{625n} \geq 5^{1024m} \cdot n^{625n} \right\}$. Podaj kresy.

a) $\inf D = \mathbf{625/256}$

b) $\inf C = \mathbf{64/27}$

c) $\sup C = \mathbf{256/81}$

d) $\sup D = \mathbf{3125/1024}$

13. Dla podanych liczb A , B i C podaj takie liczby naturalne n , k , że $k+2 \leq n$ oraz $A \cdot \binom{n}{k} = B \cdot \binom{n}{k+1} = C \cdot \binom{n}{k+2}$.

a) $A = 7, B = 3, C = 2, n = \mathbf{9}, k = \mathbf{2}$

b) $A = 7, B = 2, C = 1, n = \mathbf{8}, k = \mathbf{1}$

c) $A = 12, B = 3, C = 1, n = \mathbf{19}, k = \mathbf{3}$

d) $A = 10, B = 3, C = 1, n = \mathbf{51}, k = \mathbf{11}$