

ANALIZA 1

22 stycznia 2026 r., godz. 8:15–9:45

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadania 11, 12 i 13 to zadania dodatkowe.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Z ułamków nie trzeba wyłączać części całkowitej:
np. wystarczy podać $\frac{77}{3}$, ale $25\frac{2}{3}$ też będzie uznane.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry

NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

1. Dla podanej liczby naturalnej k podaj taką liczbę naturalną $n > k$, że

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k+10}.$$

a) $k = 6, \quad n = \dots\dots\dots$

b) $k = 7, \quad n = \dots\dots\dots$

c) $k = 8, \quad n = \dots\dots\dots$

d) $k = 9, \quad n = \dots\dots\dots$

2. Niech $G(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2) + (n+4) + \dots + (n+2k) + \dots + an}{(n+1) + (n+2) + \dots + (n+k) + \dots + bn}$.

Wtedy

a) $G(7, 4) = \dots\dots\dots$

b) $G(5, 4) = \dots\dots\dots$

c) $G(7, 3) = \dots\dots\dots$

d) $G(5, 3) = \dots\dots\dots$

3. Podaj kresy zbiorów.

a) $\sup \left\{ \sqrt{n^2 + 4n + 3} - n : n \in \mathbb{N} \right\} = \dots\dots\dots$

b) $\inf \left\{ \sqrt{n^2 + 4n + 3} - n : n \in \mathbb{N} \right\} = \dots\dots\dots$

c) $\sup \left\{ \sqrt{n^2 + 4n + 5} - n : n \in \mathbb{N} \right\} = \dots\dots\dots$

d) $\inf \left\{ \sqrt{n^2 + 4n + 5} - n : n \in \mathbb{N} \right\} = \dots\dots\dots$

4. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=4n+1}^{6n} \frac{kn^3}{\sqrt{16n^{10} + k}} = \dots\dots\dots$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{9n} \frac{kn^3}{\sqrt{16n^{10} + k}} = \dots\dots\dots$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2n+1}^{8n} \frac{kn^3}{\sqrt{16n^{10} + k}} = \dots\dots\dots$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=3n+1}^{7n} \frac{kn^3}{\sqrt{16n^{10} + k}} = \dots\dots\dots$

5. Podaj liczbę podzbiorów A zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ spełniających warunki $\forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (n+4) \in A)$ oraz

a) $4, 5, 6, 7 \in A$ b) $5, 6, 7, 8 \in A$

c) $6, 7, 8, 9 \in A$ d) $7, 8, 9, 10 \in A$

6. Niech $f_n(x) = \arctg\left(\sqrt[n]{x}\right)$. Podaj wzór na pochodną funkcji.

a) $f'_8(x) =$ b) $f'_6(x) =$

c) $f'_4(x) =$ d) $f'_2(x) =$

7. Podaj wzór na pochodną drugiego rzędu.

a) $\frac{d^2}{dx^2} \sqrt[3]{4x+3} =$ b) $\frac{d^2}{dx^2} \sqrt{5x+1} =$

c) $\frac{d^2}{dx^2} \sqrt[5]{5x+2} =$ d) $\frac{d^2}{dx^2} \sqrt[4]{2x+3} =$

8. Niech $G(k, n) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{39x} - e^{kx}}{\ln(nx+1)}$. Wówczas:

a) $G(4, 7) =$ b) $G(7, 2) =$

c) $G(6, 3) =$ d) $G(5, 5) =$

9. Niech a_k i b_k będą takimi liczbami, że prosta o równaniu $y = a_k x + b_k$ jest styczna w punkcie $(k, k \cdot \sqrt{k})$ do krzywej o równaniu $y = x \cdot \sqrt{x}$. Wówczas:

a) $a_1 =$ $b_1 =$ b) $a_9 =$ $b_9 =$

c) $a_4 =$ $b_4 =$ d) $a_{16} =$ $b_{16} =$

10. Niech g będzie funkcją odwrotną do funkcji $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem $f(x) = x^2 + 3x$. Podaj wartość pochodnej.

a) $g'(0) = \dots\dots\dots$

b) $g'(4) = \dots\dots\dots$

c) $g'(18) = \dots\dots\dots$

d) $g'(70) = \dots\dots\dots$

11. Niech $A = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge m^{2n} \geq 2^m \cdot n^{2n} \right\}$
oraz $B = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^{8m} \cdot m^{9n} \geq 3^{8m} \cdot n^{9n} \right\}$. Podaj kresy.

a) $\sup B = \dots\dots\dots$

b) $\inf B = \dots\dots\dots$

c) $\sup A = \dots\dots\dots$

d) $\inf A = \dots\dots\dots$

12. Niech $C = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3^{81m} \cdot m^{64n} \geq 2^{162m} \cdot n^{64n} \right\}$
oraz $D = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^{2048m} \cdot m^{625n} \geq 5^{1024m} \cdot n^{625n} \right\}$. Podaj kresy.

a) $\sup C = \dots\dots\dots$

b) $\inf C = \dots\dots\dots$

c) $\sup D = \dots\dots\dots$

d) $\inf D = \dots\dots\dots$

13. Dla podanych liczb A , B i C podaj takie liczby naturalne n , k , że $k+2 \leq n$ oraz $A \cdot \binom{n}{k} = B \cdot \binom{n}{k+1} = C \cdot \binom{n}{k+2}$.

a) $A=7, B=2, C=1, n = \dots\dots\dots, k = \dots\dots\dots$

b) $A=10, B=3, C=1, n = \dots\dots\dots, k = \dots\dots\dots$

c) $A=12, B=3, C=1, n = \dots\dots\dots, k = \dots\dots\dots$

d) $A=7, B=3, C=2, n = \dots\dots\dots, k = \dots\dots\dots$