

ANALIZA 1

30 stycznia 2026 r., godz. 10:15–11:45

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Z ułamków nie trzeba wyłączać części całkowitej:
np. wystarczy podać $\frac{77}{3}$, ale $25\frac{2}{3}$ też będzie uznane.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry

NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

1. Dla podanej liczby k podaj taką liczbę naturalną $n > k$, że $\binom{n}{k} = \binom{n}{4k}$.

a) $k = 4$, $n = \dots\dots\dots$

b) $k = 5$, $n = \dots\dots\dots$

c) $k = 10$, $n = \dots\dots\dots$

d) $k = 11$, $n = \dots\dots\dots$

2. Niech $G(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3) + (n+6) + \dots + (n+3k) + \dots + an}{(n+2) + (n+4) + \dots + (n+2k) + \dots + bn}$.

Wtedy

a) $G(7, 7) = \dots\dots\dots$

b) $G(7, 3) = \dots\dots\dots$

c) $G(4, 7) = \dots\dots\dots$

d) $G(4, 3) = \dots\dots\dots$

3. Podaj kres dolny zbioru.

a) $\inf \{x^2 + 8x : x \in (-5, 5)\} = \dots\dots\dots$

b) $\inf \{x^2 + 6x : x \in (-5, 5)\} = \dots\dots\dots$

c) $\inf \{x^2 + 8y : x, y \in (-5, 5)\} = \dots\dots\dots$

d) $\inf \{x^2 + 6y : x, y \in (-5, 5)\} = \dots\dots\dots$

4. Podaj wartość granicy.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{11n} \frac{k\sqrt{n}}{\sqrt{25n^5+k}} = \dots\dots\dots$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2n+1}^{12n} \frac{k\sqrt{n}}{\sqrt{25n^5+k}} = \dots\dots\dots$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=3n+1}^{13n} \frac{k\sqrt{n}}{\sqrt{25n^5+k}} = \dots\dots\dots$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=4n+1}^{14n} \frac{k\sqrt{n}}{\sqrt{25n^5+k}} = \dots\dots\dots$$

5. Podaj liczbę podzbiorów A zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ spełniających warunki $\forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (n+2) \in A)$ oraz

$$\text{a) } 7, 18 \in A \quad \dots\dots\dots$$

$$\text{b) } 6, 17 \in A \quad \dots\dots\dots$$

$$\text{c) } 5, 16 \in A \quad \dots\dots\dots$$

$$\text{d) } 4, 15 \in A \quad \dots\dots\dots$$

6. Podaj wzór na pochodną funkcji.

$$\text{a) } \frac{d}{dx} \ln(x^7 + 77) = \dots\dots\dots$$

$$\text{b) } \frac{d}{dx} \ln(e^x + 1) = \dots\dots\dots$$

$$\text{c) } \frac{d}{dx} \sqrt{x^7 + 77} = \dots\dots\dots$$

$$\text{d) } \frac{d}{dx} \sqrt{e^x + 1} = \dots\dots\dots$$

7. Podaj wzór na pochodną drugiego rzędu.

a) $\frac{d^2}{dx^2}(2x+1)^5 = \dots\dots\dots$

b) $\frac{d^2}{dx^2}(3x+2)^3 = \dots\dots\dots$

c) $\frac{d^2}{dx^2}(2x+3)^{10} = \dots\dots\dots$

d) $\frac{d^2}{dx^2}(3x+1)^{11} = \dots\dots\dots$

8. Niech $G(k, n) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{e^{kx}} - e}{\ln(nx+1)}$. Wówczas:

a) $G(4, 5) = \dots\dots\dots$

b) $G(3, 4) = \dots\dots\dots$

c) $G(2, 3) = \dots\dots\dots$

d) $G(1, 2) = \dots\dots\dots$

9. Niech a_k i b_k będą takimi liczbami, że prosta o równaniu $y = a_k x + b_k$ jest styczna w punkcie $(k, \sqrt[3]{k^2})$ do krzywej o równaniu $y = \sqrt[3]{x^2}$. Wówczas:

a) $a_8 = \dots\dots\dots$ $b_8 = \dots\dots\dots$

b) $a_1 = \dots\dots\dots$ $b_1 = \dots\dots\dots$

c) $a_{64} = \dots\dots\dots$ $b_{64} = \dots\dots\dots$

d) $a_{27} = \dots\dots\dots$ $b_{27} = \dots\dots\dots$

10. Niech g będzie funkcją odwrotną do funkcji $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem $f(x) = x^2 + 5x$. Podaj wartość pochodnej.

a) $g'(150) = \dots\dots\dots$

b) $g'(6) = \dots\dots\dots$

c) $g'(14) = \dots\dots\dots$

d) $g'(50) = \dots\dots\dots$