

KOŁOKWIUM nr 9, 30.01.2026, godz. 10:15–11:45

Zadanie 14.
Oblicz sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n^2-1)^2}.$$

Rozwiązanie:
Skorzystamy z tożsamości

$$\begin{aligned} \frac{n}{(4n^2-1)^2} &= \frac{n}{(2n-1)^2 \cdot (2n+1)^2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{8n}{(2n-1)^2 \cdot (2n+1)^2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{4n^2+4n+1-(4n^2-4n+1)}{(2n-1)^2 \cdot (2n+1)^2} = \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{(2n+1)^2-(2n-1)^2}{(2n-1)^2 \cdot (2n+1)^2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(2n+1)^2} = . \end{aligned}$$

Zatem N -ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^N \frac{n}{(4n^2-1)^2} = \frac{1}{8} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2} \right) = \\ &= \frac{1}{8} \left(\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{25} \right) + \left(\frac{1}{25} - \frac{1}{49} \right) + \left(\frac{1}{49} - \frac{1}{81} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \left(\frac{1}{(2N-5)^2} - \frac{1}{(2N-3)^2} \right) + \left(\frac{1}{(2N-3)^2} - \frac{1}{(2N-1)^2} \right) + \left(\frac{1}{(2N-1)^2} - \frac{1}{(2N+1)^2} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{(2N+1)^2} \right), \end{aligned}$$

co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do $1/8$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą $1/8$.

Zadanie 15.

Oblicz wartość granicy (ciągu):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi \cdot \sqrt{4n^2 + n}) .$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że z okresowości sinusa wynika równość

$$\sin(\pi \cdot \sqrt{4n^2 + n}) = \sin(\pi \cdot (\sqrt{4n^2 + n} - 2n)) ,$$

a ponadto

$$\sqrt{4n^2 + n} - 2n = \frac{n}{\sqrt{4n^2 + n} + 2n} \rightarrow \frac{1}{4} .$$

Z ciągłości funkcji sinus (definicja ciągowa Heinego) wynika więc, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi \cdot (\sqrt{4n^2 + n} - 2n)) = \sin \lim_{n \rightarrow \infty} (\pi \cdot (\sqrt{4n^2 + n} - 2n)) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} .$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica jest równa $1/\sqrt{2}$.

Zadanie **16.**
Oblicz wartość granicy (ciągu):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n}.$$

Rozwiązanie:

Wyrażenie pod znakiem granicy po zlogarytmowaniu przybiera postać

$$n^2 \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - n,$$

co po podstawieniu $n = 1/x$ prowadzi do

$$\frac{\ln(1+x)}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}.$$

Wobec tego korzystając z reguły de l’Hospitála otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^2 \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - n \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{(1+x)} - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{-1}{(1+x)^2}}{2} = \frac{-1}{2}.$$

W konsekwencji wyjściowa granica ma wartość

$$e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica jest równa $1/\sqrt{e}$.

Zadanie 17.

Niech

$$f(x)=g(g(g(\ldots g(g(x))\ldots)))$$

będzie złożeniem 2026 egzemplarzy funkcji g , gdzie

$$g(x)=x^2+2x$$

i niech

$$h(x)=\sqrt[2^{2026}]{f(x)}.$$

pierwiastek stopnia 2^{2026}

Rozstrzygnij, która z liczb jest większa

$$h(2025)+h(2027)$$

czy

$$2h(2026)$$

Rozwiązanie:

Ponieważ

$$g(x)=(x+1)^2-1,$$

funkcję g można zapisać jako złożenie $g=p^{-1}\circ k\circ p$, gdzie $k(x)=x^2$, $p(x)=x+1$, a p^{-1} jest funkcją odwrotną do p , czyli $p^{-1}(x)=x-1$. Wobec tego

$$g\circ g=p^{-1}\circ k\circ p\circ p^{-1}\circ k\circ p=p^{-1}\circ k\circ k\circ p$$

i podobnie

$$g^m=p^{-1}\circ k^m\circ p,$$

gdzie g^m oznacza złożenie m egzemplarzy funkcji g .

Zatem przy powyższej notacji otrzymujemy

$$f(x)=g^{2026}(x)=p^{-1}\left(k^{2026}(p(x))\right)=(x+1)^{2^{2026}}-1,$$

skąd

$$h(x)=\sqrt[n]{(x+1)^n-1}$$

dla $n=2^{2026}$.

Wówczas

$$h'(x)=\frac{(x+1)^{n-1}}{((x+1)^n-1)^{(n-1)/n}}$$

oraz

$$\begin{aligned} h''(x) &= \frac{(n-1)\cdot (x+1)^{n-2}}{((x+1)^n-1)^{(n-1)/n}} - \frac{(n-1)\cdot (x+1)^{2n-2}}{((x+1)^n-1)^{(2n-1)/n}} = \\ &= \frac{(n-1)\cdot (x+1)^{n-2}\cdot ((x+1)^n-1)}{((x+1)^n-1)^{(2n-1)/n}} - \frac{(n-1)\cdot (x+1)^{2n-2}}{((x+1)^n-1)^{(2n-1)/n}} = \\ &= \frac{(n-1)\cdot (x+1)^{2n-2} - (n-1)\cdot (x+1)^{n-2} - (n-1)\cdot (x+1)^{2n-2}}{((x+1)^n-1)^{(2n-1)/n}} = \frac{-(n-1)\cdot (x+1)^{n-2}}{((x+1)^n-1)^{(2n-1)/n}} < 0 \end{aligned}$$

dla $x>-1$.

Stąd wynika, że funkcja h jest ściśle wklęsła w przedziale $(-1,\infty)$, wobec czego

$$h(2025)+h(2027)<2h(2026).$$

Odpowiedź: Liczba $h(2025)+h(2027)$ jest mniejsza od $2h(2026)$.