

Kolokwium nr 1: czwartek 9.10.2025, godz. 8:15-9:45, materiał zad. 0–50.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach
w czwartek 2.10.2025 i piątek 3.10.2025.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

Zadania będą omawiane na ćwiczeniach tylko w miarę wolnego czasu – proszę umieć wskazać zadania, których rozwiązania chcecie Państwo zobaczyć.

Przypomnij sobie ze szkoły: wzory skróconego mnożenia, wzór dwumianowy Newtona, postęp arytmetyczny i geometryczny, logarytmy.

0. Omówić zadania z testu kwalifikacyjnego.

Oznaczenia:

$$\sum_{i=m}^n a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$\prod_{i=m}^n a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot a_{m+3} \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

Oblicz wartości wyrażeń (doprowadź wynik do możliwie prostej postaci):

1. $\sum_{i=3}^5 i^2$

2. $\sum_{i=-99}^{100} i^3$

3. $\sum_{i=-10}^{10} 7$

4. $\sum_{i=1}^{100} i$

5. $\sum_{i=1}^{24} i^2$

6. $\prod_{i=1}^6 i$

7. $\prod_{i=-2025}^{2025} i^{2025}$

8. $\sum_{n=1}^{2024} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$

9. $\sum_{n=1}^{9799} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}}$

10. $\sum_{n=1}^{47} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+3}}$

11. $\prod_{n=1}^{2025} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$

12. $\sum_{n=2}^7 \log_6 \log_n (n+2)$

13. $\prod_{m=2}^{2025} \prod_{n=1}^{m-1} \left(\sqrt[m]{m} - \sqrt[n]{n}\right)$

14. Wiadomo, że wśród następujących sześciu liczb

$$3465^2 - 2, \quad 3465^2 - 4, \quad 3465^2 - 8, \quad 3465^2 - 16, \quad 3465^2 - 32, \quad 3465^2 - 64$$

trzy są pierwsze, a trzy złożone. Które z podanych liczb są pierwsze?

15. Uzupełnić wzory skróconego mnożenia. Kropki występujące po lewej stronie równości zastąpić pojedynczym znakiem.

- a) $(x+2)^2 = x^2 + \dots$
- b) $a^3 + b^3 = (a+b) \cdot \dots$
- c) $a^3 - b^3 = (a-b) \cdot \dots$
- d) $a^3 \dots b^3 = (a^2 + ab + b^2) \cdot \dots$
- e) $a^4 \dots b^4 = (a+b) \cdot \dots$
- f) $a^4 \dots b^4 = (a-b) \cdot \dots$
- g) $a^5 \dots b^5 = (a+b) \cdot \dots$
- h) $a^5 \dots b^5 = (a-b) \cdot \dots$
- i) $(a+b)^3 = a^3 + 3 \dots$
- j) $(a-b)^4 = a^4 - \dots$
- k) $(a-b)^5 = a^5 - \dots$

- l) $a^n - b^n = (a - b) \cdot \dots$
m) $a^n + b^n = (a + b) \cdot \dots$ - dla których n ?
n) $a^n - b^n = (a + b) \cdot \dots$ - dla których n ?
o) $a^n + b^n = (a^2 + b^2) \cdot \dots$ - dla których n ?
p) $a^n - b^n = (a^2 + b^2) \cdot \dots$ - dla których n ?

16. W liczbie dziewięciocyfrowej podanych jest 5 cyfr. Wpisz brakujące 4 cyfry tak, aby uzyskana liczba była kwadratem liczby całkowitej.

a)

1	0	0	1	8				
---	---	---	---	---	--	--	--	--

 ;

b)

4	0	0	2	4				
---	---	---	---	---	--	--	--	--

 ;

c)

9	0	0	2	4				
---	---	---	---	---	--	--	--	--

 ;

d)

9	0	0	4	8				
---	---	---	---	---	--	--	--	--

 .

17. Zapisz podaną liczbę wymierną w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

a) $\frac{1}{\sqrt{5}-1} - \frac{1}{\sqrt{5}+1} = \dots\dots\dots$; b) $\frac{1}{\sqrt{7}-1} - \frac{1}{\sqrt{7}+1} = \dots\dots\dots$;

c) $\frac{1}{\sqrt{11}-1} - \frac{1}{\sqrt{11}+1} = \dots\dots\dots$; d) $\frac{1}{\sqrt{13}-1} - \frac{1}{\sqrt{13}+1} = \dots\dots\dots$.

18. Zapisz podaną liczbę w postaci iloczynu dwóch liczb całkowitych większych od 1.

a) $9\,991 = \dots\dots\dots$; b) $89\,951 = \dots\dots\dots$;

c) $999\,919 = \dots\dots\dots$; d) $8\,999\,999 = \dots\dots\dots$.

19. Dla danej liczby n podaj dwucyfrową liczbę pierwszą p będącą dzielnikiem liczby n .

a) $n = 77^{111} - 24^{111}$, $p = \dots\dots\dots$; b) $n = 69^{122} - 20^{122}$, $p = \dots\dots\dots$;

c) $n = 51^{133} + 22^{133}$, $p = \dots\dots\dots$; d) $n = 66^{166} - 31^{166}$, $p = \dots\dots\dots$.

20. Wiedząc, że

$$\binom{14}{4} = 1001, \quad \binom{14}{5} = 2002, \quad \binom{14}{6} = 3003,$$

podać wartość współczynnika dwumianowego

a) $\binom{15}{5} = \dots\dots\dots$; b) $\binom{15}{6} = \dots\dots\dots$; c) $\binom{16}{6} = \dots\dots\dots$; d) $\binom{15}{10} = \dots\dots\dots$.

21. Dla podanych liczb a oraz k wskazać taką liczbę naturalną n , aby zachodziła równość

$$\left(a^{a^k}\right)^{a^{a^k}} = a^{a^n}.$$

Uwaga: Potęgowanie wykonuje się *od góry*, tzn. $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.

a) $a = 5$, $k = 2$, $n = \dots\dots\dots$; b) $a = 3$, $k = 3$, $n = \dots\dots\dots$;

c) $a = 2$, $k = 5$, $n = \dots\dots\dots$; d) $a = 3$, $k = 4$, $n = \dots\dots\dots$.

22. Wskazać taką liczbę C , że dla dowolnych liczb całkowitych nieujemnych n i k , gdzie $n \geq k + 2$, prawdziwa jest równość

$$\binom{n}{k} + C \cdot \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2} = \binom{n+2}{k+2}.$$

23. Uporządkować rosnąco następujące liczby:

$$\binom{100}{7}, \quad \binom{100}{27}, \quad \binom{100}{47}, \quad \binom{100}{57}, \quad \binom{100}{77}, \quad \binom{100}{97}.$$

24. Dowieść, że dla dowolnych liczb całkowitych nieujemnych a, b, c zachodzi równość

$$\binom{a+b+c}{a} \binom{b+c}{b} = \binom{a+b+c}{b} \binom{a+c}{a}.$$

Uwaga: Przyjmujemy, że w postępie geometrycznym wszystkie wyrazy są różne od zera.

25. Obliczyć sumę postępu geometrycznego

$$1 + 3 + 9 + 27 + \dots + 3^n.$$

26. Pierwszy, czwarty i dziesiąty wyraz postępu arytmetycznego tworzą (z zachowaniem kolejności) postęp geometryczny trójwyrazowy. Wyznaczyć iloraz tego postępu geometrycznego.

27. Wyznaczyć pierwszy wyraz postępu arytmetycznego z poprzedniego zadania, jeśli wiadomo ponadto, że jego siódmy wyraz jest równy 21.

28. Jeżeli w poprzednich dwóch zadaniach uzyskał(a/e)ś odpowiedzi odpowiednio 2 i 7, rozwiąż je ponownie, tym razem poprawnie.

29. Dla których liczb naturalnych $n \geq 3$ prawdziwe jest następujące twierdzenie?
W dowolnym postępie arytmetycznym n -wyrazowym o sumie 0 co najmniej jeden z wyrazów jest równy 0.

30. Dla których liczb naturalnych $n \geq 3$ prawdziwe jest następujące twierdzenie?
W dowolnym postępie **geometrycznym** n -wyrazowym o **iloczynie wyrazów równym 1**, co najmniej jeden z wyrazów jest równy 1.

31. Dla których liczb naturalnych $n \geq 3$ dowolny postęp geometryczny n -wyrazowy ma dodatni iloczyn wyrazów?

32. Dla których liczb naturalnych $n \geq 3$ istnieje postęp arytmetyczny n -wyrazowy o sumie n i jednym z wyrazów równym n ?

33. Dla których liczb naturalnych n podany wzór jest poprawnym wzorem na sumę n -wyrazowego postępu arytmetycznego $a_1, a_2, \dots, a_n$?

a) $S_n = \frac{a_7 + a_8 + a_{12}}{3} \cdot n$

b) $S_n = \frac{3a_{11} + a_{17}}{4} \cdot n$

c) $S_n = \frac{a_7 + a_8 + a_n}{3} \cdot n$

d) $S_n = \frac{a_4 + a_7 + a_{n-9} + a_n}{4} \cdot n$

34. Dobrać takie liczby A, B (być może zależne od n), aby otrzymać wzór na sumę n -wyrazowego postępu arytmetycznego $a_1, a_2, \dots, a_n$.

- a) $S_n = Aa_1 + Ba_2 \quad (n \geq 3)$
- b) $S_n = Aa_3 + Ba_7 \quad (n \geq 7)$

35. W dowolnym postępie arytmetycznym n -wyrazowym $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ o sumie 90, co najmniej jeden z wyrazów jest równy w .

Dla podanej liczby n podać liczbę w , dla której powyższe zdanie jest prawdziwe. Wpisz **NIE**, jeśli liczba w o żądanej własności nie istnieje.

- a) $n = 5, \quad w = \dots\dots\dots$; b) $n = 9, \quad w = \dots\dots\dots$;
- c) $n = 10, \quad w = \dots\dots\dots$; d) $n = 15, \quad w = \dots\dots\dots$

36. Dla podanej liczby n podać przykład rosnącego postępu arytmetycznego n -wyrazowego o sumie wyrazów równej n^2 , w którym występuje wyraz równy 1.

- a) $n = 3, \quad \dots\dots\dots$; b) $n = 4, \quad \dots\dots\dots$;
- c) $n = 5, \quad \dots\dots\dots$; d) $n = 7, \quad \dots\dots\dots$

37. Zapisać podane sumy w postaci ułamka dziesiętnego z przybliżeniem do 100 miejsc po przecinku:

- a) $\sum_{n=1}^{2025} \frac{1}{2^n}$
- b) $\sum_{n=1}^{2025} \frac{1}{3^n}$
- c) $\sum_{n=1}^{2025} \frac{1}{4^n}$
- d) $\sum_{n=1}^{2025} \frac{1}{6^n}$
- e) $\sum_{n=1}^{2025} \frac{(-1)^n}{9^n}$

38. Uzupełnić zdanie: Dla dowolnego postępu $\dots\dots\dots a_1, a_2, \dots, a_n$ ciąg $a_1 + 7, a_2 + 7, \dots, a_n + 7$ jest postępem $\dots\dots\dots$

39. Uzupełnić zdanie: Dla dowolnego postępu $\dots\dots\dots a_1, a_2, \dots, a_n$ ciąg $7a_1, 7a_2, \dots, 7a_n$ jest postępem $\dots\dots\dots$

40. Uzupełnić zdanie: Dla dowolnego postępu $\dots\dots\dots a_1, a_2, \dots, a_n$ ciąg $a_1^7, a_2^7, \dots, a_n^7$ jest postępem $\dots\dots\dots$

41. Uzupełnić zdanie: Dla dowolnego postępu $\dots\dots\dots a_1, a_2, \dots, a_n$ ciąg $7^{a_1}, 7^{a_2}, \dots, 7^{a_n}$ jest postępem $\dots\dots\dots$

42. Uzupełnić zdanie: Dla dowolnego postępu $\dots\dots\dots a_1, a_2, \dots, a_n$ o wyrazach dodatnich ciąg $\log_7 a_1, \log_7 a_2, \dots, \log_7 a_n$ jest postępem $\dots\dots\dots$

Uprościć wyrażenia

43. $4^{2+\log_2 7}$
44. $\log_{\sqrt{3}} 2 \cdot \log_5 9$
45. $\log_6 2 + \log_{36} 9$
46. $\log_{(\sqrt{2}-1)}(\sqrt{2}+1)$
47. $2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2}$
48. $(\log_2 3 - \log_4 9)^{2025}$
49. $(\log_2 6 - \log_4 9)^{2025}$

50. Uzupełnić drugie zdanie:
Wiadomo, że wartość ułamka nie zmieni się, jeżeli licznik i mianownik pomnożymy przez tę samą liczbę różną od zera.
Podobnie, wartość logarytmu nie zmieni się, jeżeli podstawę i liczbę logarytmowaną $\dots\dots\dots$