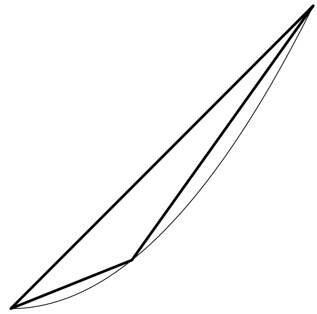
Zadania do omówienia na ćwiczeniach w piątek[1] 30.01.2026 i na wykładzie w środę 4.02.2026.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed zajęciami !!!

Zadania z ubiegłorocznego egzaminu.



849. Jakie największe pole może mieć trójkąt jak na rysunku obok? Dwa wierzchołki to $(0, 0)$ i $(1, 1)$, a trzeci wierzchołek leży na fragmencie paraboli o równaniu $y=x^2$ odpowiadającym $x\in(0, 1)$.

Wskazówka: Można bez dowodu skorzystać ze wzoru na pole trójkąta o wierzchołkach $(0, 0)$, $(1, 1)$ i (a, b): $\mathrm{POLE}=\dfrac{|a-b|}{2}$.

850. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność
$$\binom{3n+2}{n}>\frac{3}{4}\cdot 6^n\,.$$

851. Udowodnij, że liczba $\log_{(27/25)}\left(\dfrac{5}{9}\right)$ jest niewymierna.

852. Wyznacz (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru
$$\left\{\sqrt{n^2+12n+37}-n:\,n\in\mathbb{N}\right\}\,.$$

853. Niech funkcja $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie określona wzorem
$$f(x)=4\ln x-\sqrt[5]{x}\,.$$
Rozstrzygnij, która z liczb (obydwie $\approx 78,70703\,63727\,20384$) jest większa:
$$f\left(10^7\right)+f\left(10^7+2\right)=f(10\,000\,000)+f(10\,000\,002) \qquad \text{czy} \qquad 2\cdot f(10\,000\,001)=2\cdot f\left(10^7+1\right)\ ?$$

854. Dana jest funkcja $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ określona wzorem
$$f(x)=\ln\left(x^7+3\right)\,.$$
Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych nieujemnych x, y zachodzi nierówność
$$|f(x)-f(y)|\leqslant 4\cdot|x-y|\,.$$

855. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność
$$2^{1025}\cdot n\leqslant 2^n+2^{1035}\,.$$

[1] Po przeanalizowaniu wyników wszystkich 7 kolokwiów podejmę decyzję o ewentualnym kolokwium dodatkowym dla osób najlepszych i osób "tuż pod kreską na zaliczenie". Jeżeli kolokwium będzie ogłoszone, to odbędzie się w piątek 30 stycznia 2026 roku w godzinach 10:15–11:45 w sali HS.

856. Wyznacz punkt, w którym funkcja f zdefiniowana wzorem
$$f(x)=\frac{x}{40}-\frac{9\cdot\ln\left(4x^2+1\right)}{80}+\operatorname{arctg}(2x)$$
osiąga największą wartość na przedziale $[4, 5]$.

857. Udowodnij, że liczba $\log_{490}70$ jest niewymierna.

858. Wyznacz (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru
$$\left\{\sqrt{n^2+12n+35}-n:\, n\in\mathbb{N}\right\}.$$

859. Niech funkcja $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie określona wzorem
$$f(x)=9\ln x-\sqrt[10]{x}\,.$$
Rozstrzygnij, która z liczb jest większa:
$$f\left(10^{20}-2\right)+f\left(10^{20}\right)\qquad\text{czy}\qquad 2\cdot f\left(10^{20}-1\right)\ ?$$
Powyższe liczby $\approx 628,9306334778564462464969236863711147363965359063582713719980 4$ różnią się na 60-tym miejscu po przecinku.

860. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem
$$f(x)=\sqrt[666]{x^{666}+666}\,.$$
Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność
$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|\,.$$

861. (dla ambitnych) Funkcja ciągła $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełnia dla każdej liczby rzeczywistej x warunek
$$f(f(f(x)))=x\,.\qquad\text{(3-krotne złożenie jest identycznością)}$$
Udowodnij, że wówczas dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $f(x)=x$.

862. (dla ambitnych) Funkcja $f\in C^3(\mathbb{R})$ (tzn. mająca na całej prostej ciągłe pochodne do trzeciego rzędu włącznie) spełnia dla każdej liczby rzeczywistej x warunek $f'''(x)>0$. Udowodnij, że wówczas
$$f(0)+3f(2)<3f(1)+f(3)\,.$$

Wskazówka: Zbadaj wypukłość/wklęsłość funkcji $g(x)=f(x+1)-f(x)$.

863. Podaj kres górny zbioru.

a) $\sup\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \wedge 8^{m^3}\leqslant 27^{n^3}\right\}=$ ....;

b) $\sup\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \wedge 3^{m^2}\leqslant 81^{n^2}\right\}=$ ....;

c) $\sup\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \wedge 2^{m^3}\leqslant 32^{n^3}\right\}=$ ....;

d) $\sup\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \wedge 9^{m^2}\leqslant 49^{n^2}\right\}=$ ....

864. Zapisz w postaci przedziału dziedzinę funkcji f określonej podanym wzorem.

a) $f(x)=\sqrt{\log_2\log_2\log_3 x}$, $D_f=$ ....;

b) $f(x)=\sqrt{\log_3\log_3\log_2 x}$, $D_f=$ ....;

c) $f(x)=\sqrt{\log_5\log_4\log_3 x}$, $D_f=$ ....;

d) $f(x)=\sqrt{\log_7\log_5\log_2 x}$, $D_f=$ ....

865. Dla podanej liczby k podaj taką liczbę naturalną $n>k$, że $\binom{n}{k}=\binom{n}{4k}$.

a) $k=4$, $n=$ ....; b) $k=5$, $n=$ ....;

c) $k=10$, $n=$ ....; d) $k=111$, $n=$ ....

866. Podaj wzór na pochodną funkcji.

a) $\frac{d}{dx}\ln\left(e^{2x}+x^7\right)=$ ....; b) $\frac{d}{dx}\ln\cos x=$ ....;

c) $\frac{d}{dx}\operatorname{arctg}\left(x\cdot\sqrt{x}\right)=$ ....; d) $\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt[4]{5x^5+1}}=$ ....

867. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\ln(1+2x)}=$ ....; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\ln(1+4x)}=$ ....;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{\ln(1+6x)}=$ ....; d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{16x}-1}{\ln(1+8x)}=$ ....

868. Niech x_k będzie taką liczbą, że punkt $(x_k,\,x_k)$ leży na prostej stycznej w punkcie $(k,\,k^2)$ do paraboli o równaniu $y=x^2$. Wówczas:

a) $x_5=$ ....; b) $x_2=$ ....;

c) $x_3=$ ....; d) $x_4=$ ....

869. Podaj liczbę podzbiorów A zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$ spełniających warunki $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\,(n\in A\Rightarrow(n+2)\in A)$ oraz

a) $10,15\in A$ .... ; b) $11,16\in A$ .... ;
c) $12,17\in A$ .... ; d) $13,18\in A$ ....

870. Niech g będzie funkcją odwrotną do funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem $f(x)=x^3+5x+3$. Podaj wartość pochodnej.

a) $g'(3)=$ .... ; b) $g'(9)=$ .... ;
c) $g'(21)=$ .... ; d) $g'(45)=$ ....

871. Niech $f(x)=x^{100}\cdot e^{x^{33}}$. Podaj wartość pochodnej danego rzędu.

a) $f^{(199)}(0)=$ .... ; b) $f^{(430)}(0)=$ .... ;
c) $f^{(463)}(0)=$ .... ; d) $f^{(760)}(0)=$ ....

872. Niech

$$G(p)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n^2+n+2}+\frac{n+4}{n^2+n+4}+\ldots+\frac{n+2k}{n^2+n+2k}+\ldots+\frac{pn}{n^2+pn}\right).$$

Wówczas

a) $G(3)=$ .... ; b) $G(5)=$ .... ; c) $G(7)=$ .... ; d) $G(9)=$ ....

873. Podaj sumę szeregu:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{80^n}=$ .... ; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{80^n}=$ .... ;
c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n^4}}{99^n}=$ .... ; d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{3^n}}{99^n}=$ ....

874. Podaj sumę szeregu:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{n+48}{n}}-\sqrt{\frac{n+49}{n+1}}\right)=$ .... ; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{n+48}{n}}-\sqrt{\frac{n+50}{n+2}}\right)=$ .... ;
c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{n+48}{n}}-\sqrt{\frac{n+51}{n+3}}\right)=$ .... ; d) $\displaystyle\sum_{\mathbf{n=2}}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{n+48}{n}}-\sqrt{\frac{n+49}{n+1}}\right)=$ ....

875. Podaj kres górny zbioru. **Przypomnienie:** $\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$

a) $\sup\left\{\frac{m}{n}:m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 2^{m^4}\leqslant 16^{n^4}\right\}=$ .... ;
b) $\sup\left\{\frac{m}{n}:m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 32^{m^3}\leqslant 128^{n^3}\right\}=$ .... ;
c) $\sup\left\{\frac{m}{n}:m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 25^{m^2}\leqslant 64^{n^2}\right\}=$ .... ;
d) $\sup\left\{\frac{m}{n}:m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 27^{m^3}\leqslant 64^{n^3}\right\}=$ ....

876. Zapisz w postaci sumy przedziałów dziedzinę funkcji f określonej podanym wzorem.

a) $f(x)=\sqrt{\log_{11}\log_6|\log_2 x|}$, $D_f=$ .... ;

b) $f(x)=\sqrt{\log_{13}\log_2|\log_7 x|}$, $D_f=$ .... ;

c) $f(x)=\sqrt{\log_{17}\log_2|\log_5 x|}$, $D_f=$ .... ;

d) $f(x)=\sqrt{\log_{19}\log_7|\log_2 x|}$, $D_f=$ ....

877. Dla podanej liczby k podaj taką liczbę naturalną $n>k$, że $\binom{n}{k}=\binom{n}{k^3}$.

a) $k=2$, $n=$ .... ; b) $k=3$, $n=$ .... ;

c) $k=4$, $n=$ .... ; d) $k=5$, $n=$ ....

878. Dla podanej funkcji f podaj wartość parametru a, dla której funkcja f jest ciągła. **Przypomnienie:** $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x.

a) $f(x)=a\cdot\{x\}-\sin\left(\frac{\pi\cdot\{x\}}{2}\right)$, $a=$ .... ;

b) $f(x)=a\cdot\{x\}-\sin\left(\frac{\pi\cdot\{x\}}{3}\right)$, $a=$ .... ;

c) $f(x)=a\cdot\{x\}-\sin\left(\frac{\pi\cdot\{x\}}{4}\right)$, $a=$ .... ;

d) $f(x)=a\cdot\{x\}-\sin\left(\frac{\pi\cdot\{x\}}{6}\right)$, $a=$ ....

879. Niech $f(x)=x\cdot\sqrt{x}$. Podaj wzór na pochodną danego rzędu.

a) $f'(x)=$ .... ; b) $f''(x)=$ .... ;

c) $f'''(x)=$ .... ; d) $f^{(4)}(x)=$ ....

880. Niech $f(x)=x\cdot\sqrt[3]{x}$. Podaj wzór na pochodną danego rzędu.

a) $f^{(4)}(x)=$ .... ; b) $f'''(x)=$ .... ;

c) $f''(x)=$ .... ; d) $f'(x)=$ ....

881. Niech x_k będzie taką liczbą, że punkt (x_k, x_k) leży na prostej stycznej w punkcie (k, k^3) do krzywej o równaniu $y=x^3$. Wówczas:

a) $x_2=$ .... ; b) $x_3=$ .... ; c) $x_4=$ .... ; d) $x_{10}=$ ....

882. Niech g będzie funkcją odwrotną do funkcji $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem $f(x)=\sqrt{x}+1$. Podaj wartość pochodnej.

a) $g'(5)=$ .... ; b) $g'(10)=$ .... ; c) $g'(65)=$ .... ; d) $g'(101)=$ ....

883. Niech

$$G(p)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+p}{n^2+n+p}+\frac{n+2p}{n^2+n+2p}+\ldots+\frac{n+kp}{n^2+n+kp}+\ldots+\frac{7n}{n^2+7n}\right).$$

Wówczas

a) $G(1)=$ .... ; b) $G(2)=$ .... ; c) $G(3)=$ .... ; d) $G(6)=$ ....

884. Niech $f(x)=x^{333}\cdot e^{x^{100}}$. Podaj wartość pochodnej danego rzędu.

a) $f^{(1333)}(0)=$ .... ; b) $f^{(2333)}(0)=$ .... ;

c) $f^{(3333)}(0)=$ .... ; d) $f^{(4333)}(0)=$ ....

885. Podaj sumę szeregu:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n^{26}}}{26^n}=$ .... ; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{26^n}}{26^n}=$ .... ;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n^{25}}}{26^n}=$ .... ; d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{25^n}}{26^n}=$ ....

886. Podaj sumę szeregu:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+3}-\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+4}\right)=$ .... ;

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+2}-\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+3}\right)=$ .... ;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}\right)=$ .... ;

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}-\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right)=$ ....

887. **(dla ambitnych)** Podaj kresy zbioru $Z(A,\,B)=\left\{\frac{m}{n}:\,m,n\in\mathbb{N}\;\wedge\;2^{A^m}=4^{B^n}\right\}$.

a) $\inf Z(16,\,32)=$ .... , $\sup Z(16,\,32)=$ .... ;

b) $\inf Z(8,\,16)=$ .... , $\sup Z(8,\,16)=$ .... ;

c) $\inf Z(64,\,128)=$ .... , $\sup Z(64,\,128)=$ .... ;

d) $\inf Z(32,\,64)=$ .... , $\sup Z(32,\,64)=$ ....

888. **(dla ambitnych)** To samo, co w poprzednim zadaniu.

a) $\inf Z(32,\,128)=$ .... , $\sup Z(32,\,128)=$ .... ;

b) $\inf Z(128,\,16)=$ .... , $\sup Z(128,\,16)=$ .... ;

c) $\inf Z(128,\,32)=$ .... , $\sup Z(128,\,32)=$ .... ;

d) $\inf Z(8,\,128)=$ .... , $\sup Z(8,\,128)=$ ....