

849. Jakie największe pole może mieć trójkąt jak na rysunku obok? Dwa wierzchołki to $(0, 0)$ i $(1, 1)$, a trzeci wierzchołek leży na fragmencie paraboli o równaniu $y = x^2$ odpowiadającym $x \in (0, 1)$.

Wskazówka: Można bez dowodu skorzystać ze wzoru na pole trójkąta o wierzchołkach $(0, 0)$, $(1, 1)$ i (a, b) : $\text{POLE} = \frac{|a - b|}{2}$.

Rozwiązanie:
Niech (a, a^2) , gdzie $a \in (0, 1)$, będzie wierzchołkiem trójkąta leżącym na paraboli.

Wówczas pole trójkąta jest równe $P(a) = \frac{a - a^2}{2}$.

Zauważmy, że

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} P(a) = \lim_{a \rightarrow 1^-} P(a) = 0,$$

a ponadto

$$P'(a) = 1 - 2a.$$

Wobec tego $P'(a) = 0$ dla $a = 1/2$, co prowadzi do maksymalnej wartości pola trójkąta równej

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{8}.$$

Odpowiedź: Największe możliwe pole trójkąta wynosi $1/8$.

850. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{3n+2}{n} > \frac{3}{4} \cdot 6^n.$$

Rozwiązanie:
Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

Dla $n = 1$ mamy $\binom{3n+2}{n} = \binom{5}{1} = 5$ oraz $\frac{3}{4} \cdot 6^n = 9/2 = 4\frac{1}{2}$, a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $5 > 4,5$, jest więc prawdziwa.

Zanim przystąpimy do dalszej części rozwiązania, przepisemy dowodzoną nierówność w postaci:

$$\frac{(3n+2)!}{n! \cdot (2n+2)!} > \frac{3}{4} \cdot 6^n.$$

Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

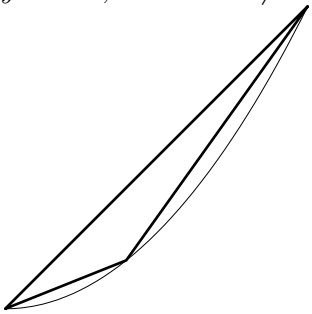
$$\frac{(3n+2)!}{n! \cdot (2n+2)!} > \frac{3}{4} \cdot 6^n.$$

Chcemy wykazać, że

$$\frac{(3n+5)!}{(n+1)! \cdot (2n+4)!} > \frac{3}{4} \cdot 6^{n+1}.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$L = \frac{(3n+5)!}{(n+1)! \cdot (2n+4)!} = \frac{(3n+2)! \cdot (3n+3) \cdot (3n+4) \cdot (3n+5)}{n! \cdot (2n+2)! \cdot (n+1) \cdot (2n+3) \cdot (2n+4)} =$$



$$\begin{aligned} &= \frac{(3n+2)!}{n! \cdot (2n+2)!} \cdot \frac{(3n+3) \cdot (3n+4) \cdot (3n+5)}{(n+1) \cdot (2n+3) \cdot (2n+4)} > \frac{3}{4} \cdot 6^n \cdot \frac{3 \cdot (3n+4) \cdot (3n+5)}{(2n+3) \cdot (2n+4)} \geqslant \\ &\geqslant \frac{3}{4} \cdot 6^n \cdot 6 = \frac{3}{4} \cdot 6^{n+1} = P, \end{aligned}$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{3 \cdot (3n+4) \cdot (3n+5)}{(2n+3) \cdot (2n+4)} \geqslant 6.$$

Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościami

$$\begin{aligned} &\frac{(3n+4) \cdot (3n+5)}{(2n+3) \cdot (2n+4)} \geqslant 2, \\ (3n+4) \cdot (3n+5) &\geqslant 2 \cdot (2n+3) \cdot (2n+4), \\ 9n^2 + 27n + 20 &\geqslant 8n^2 + 28n + 24, \\ n^2 &\geqslant n + 4, \\ n^2 - n + \frac{1}{4} &\geqslant 4,25, \\ \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 &\geqslant 4,25 = \left(3 - \frac{1}{2}\right)^2 - 2, \end{aligned}$$

a więc dowodzona nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 3$.

To oznacza, że pierwszą implikacją udowodnioną drugim krokiem indukcyjnym jest, zapisując symbolicznie, implikacja $T(3) \Rightarrow T(4)$.

Przeprowadzone na początku rozwiązania sprawdzenie dla $n = 1$ okazuje się nie mieć związku z indukcją, ale jest częścią rozwiązania, bo mamy udowodnić nierówność także dla $n = 1$.

Dla zakończenia rozwiązania musimy sprawdzić dowodzoną nierówność dla $n = 2$ (bo tego przypadku nie obejmuje dowód indukcyjny) oraz dla $n = 3$ (żeby indukcja w ogóle ruszyła – to sprawdzenie przejmuje rolę pierwszego kroku indukcyjnego).

Dla $n = 2$ mamy $\binom{3n+2}{n} = \binom{8}{2} = 28$ oraz $\frac{3}{4} \cdot 6^n = \frac{3}{4} \cdot 36 = 27$, a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $28 > 27$.

Dla $n = 3$ mamy

$$\binom{3n+2}{n} = \binom{11}{3} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{6} = 11 \cdot 5 \cdot 3 = 11 \cdot 15 = 165$$

oraz $\frac{3}{4} \cdot 6^n = \frac{3}{4} \cdot 216 = 162$, a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $165 > 162$.

Uwaga:

Sprawdzenie dla $n = 3$ nie wydaje się wymagać wiele pracy, jednak **brak świadomości** konieczności wykonania tego sprawdzenia jest bardzo poważnym błędem, demaskującym niezrozumienie istoty dowodu indukcyjnego. W takim przypadku **punktacja powinna być mocno obniżona**.

851. Udowodnij, że liczba $\log_{(27/25)}\left(\frac{5}{9}\right)$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_{(27/25)}\left(\frac{5}{9}\right)$ jest wymierna i niech będzie ona równa $-m/n$, gdzie m, n są liczbami naturalnymi (**zauważmy, że jest to liczba ujemna, bo podstawa logarytmu jest większa od 1, a liczba logarytmowana jest mniejsza od 1**). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned}\log_{(27/25)}\left(\frac{5}{9}\right) &= -\frac{m}{n}, \\ \left(\frac{27}{25}\right)^{-m/n} &= \frac{5}{9}, \\ \left(\frac{27}{25}\right)^{-m} &= \left(\frac{5}{9}\right)^n, \\ \left(\frac{25}{27}\right)^m &= \left(\frac{5}{9}\right)^n, \\ 25^m \cdot 9^n &= 5^n \cdot 27^m.\end{aligned}$$

Wykażemy, że powyższe równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych m, n .

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy $3^{2n} \cdot 5^{2m} = 3^{3m} \cdot 5^n$.

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 2n &= 3m \\ 2m &= n \end{cases}$$

Jednak powyższy układ równań nie ma rozwiązania w liczbach dodatnich m, n , gdyż dla każdego rozwiązania w liczbach rzeczywistych m, n mamy

$$3m = 2n = 4m,$$

skąd $m = 0$.

Doszliśmy do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{(27/25)}\left(\frac{5}{9}\right)$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{(27/25)}\left(\frac{5}{9}\right)$ jest niewymierna.

Uwaga:

Ponieważ korzystamy z jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze liczb naturalnych, **błędne** jest każde rozwiązanie oparte na rozkładzie, w którym:

- zamiast rozkładu na czynniki pierwsze występuje rozkład z potęgami liczb złożonych, lub
- występują wykładniki, o których nie wiadomo, że są całkowite i nieujemne.

W takim przypadku punktacja powinna być bardzo mocno obniżona.

852. Wyznacz (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{\sqrt{n^2 + 12n + 37} - n : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Rozwiązanie:

Przekształcając wyrażenie definiujące dany w zadaniu zbiór otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+12n+37}-n &= \sqrt{n^2+12n+37}-(n+6)+6 = \frac{n^2+12n+37-(n+6)^2}{\sqrt{n^2+12n+37}+(n+6)}+6 = \\ &= \frac{n^2+12n+37-n^2-12n-36}{\sqrt{n^2+12n+37}+(n+6)}+6 = \frac{1}{\sqrt{n^2+12n+37}+(n+6)}+6.\end{aligned}$$

Z otrzymanej postaci wynika, że podane wyrażenie maleje wraz z n , a przy $n \rightarrow \infty$ dąży do 6.

Dla zakończenia rozwiązania wystarczy odnotować, że w ciągu malejącym pierwszy wyraz (tu równy $\sqrt{50}-1$) jest największy, a kresem dolnym zbioru wyrazów jest granica ciągu.

Odpowiedź: Kres górny danego zbioru jest równy $\sqrt{50}-1=5\sqrt{2}-1$, a kres dolny 6.

853. Niech funkcja $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x)=4\ln x-\sqrt[5]{x}.$$

Rozstrzygnij, która z liczb (obydwie $\approx 78,70703\,63727\,20384$) jest większa:

$$f\left(10^7\right)+f\left(10^7+2\right)=f(10\,000\,000)+f(10\,000\,002) \quad \text{czy} \quad 2\cdot f(10\,000\,001)=2\cdot f\left(10^7+1\right) \, ?$$

Rozwiązanie:

Różniczkując dwukrotnie funkcję f otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{4}{x}-\frac{1}{5\cdot x^{4/5}}$$

oraz

$$f''(x)=-\frac{4}{x^2}+\frac{4}{25\cdot x^{9/5}},$$

skąd nierówność $f''(x)>0$ jest równoważna kolejnym nierównościami

$$\begin{aligned}-\frac{4}{x^2}+\frac{4}{25\cdot x^{9/5}} &> 0, \\ \frac{4}{25\cdot x^{9/5}} &> \frac{4}{x^2}, \\ x^{1/5} &> 25, \\ x &> 5^{10}.\end{aligned}$$

Zatem f jest ściśle wypukła w przedziale $(5^{10},\infty)$, skąd

$$f(x)+f(y)>2\cdot f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych dodatnich $x,y>5^{10}$.

W szczególności

$$f(10\,000\,000)+f(10\,000\,002)>2\cdot f(10\,000\,001),$$

gdyż

$$5^{10}=5^3\cdot 5^7=125\cdot 5^7<128\cdot 5^7=2^7\cdot 5^7=10^7=10\,000\,000,$$

854. Dana jest funkcja $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \ln(x^7 + 3) \text{ .}$$

Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych nieujemnych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq 4 \cdot |x - y| \text{ .}$$

Rozwiązanie:

Dla $x = y$ dowodzona nierówność jest oczywista, natomiast przy $x \neq y$ z twierdzenia Lagrange’a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)| \cdot |x - y| \text{ ,}$$

gdzie c jest pewną liczbą leżącą między x i y .

Rozwiązanie zadania będzie zakończone, jeśli wykazemy, że dla każdej liczby rzeczywistej $x > 0$ zachodzi nierówność

$$|f'(x)| \leq 4 \text{ ,}$$

czyli

$$\frac{7x^6}{x^7 + 3} \leq 4 \text{ .} \tag{♠}$$

Nierówność (♠) można udowodnić różnymi sposobami.

Sposób I:

Wyliczamy

$$f''(x) = \frac{42x^5 \cdot (x^7 + 3) - 49x^{12}}{(x^7 + 3)^2} = \frac{-7x^{12} + 42 \cdot 3 \cdot x^5}{(x^7 + 3)^2} = \frac{7x^5 \cdot (18 - x^7)}{(x^7 + 3)^2} \text{ .}$$

Stąd wynika, że $f''(\sqrt[7]{18}) = 0$, a ponadto $f''(x) > 0$, gdy $x \in (0, \sqrt[7]{18})$ oraz $f''(x) < 0$, gdy $x > \sqrt[7]{18}$.

Wobec tego funkcja f' jest dodatnia i rosnąca na przedziale $(0, \sqrt[7]{18}]$ oraz dodatnia i malejąca na przedziale $[\sqrt[7]{18}, \infty)$. W konsekwencji przyjmuje ona w punkcie $\sqrt[7]{18}$ wartość największą. Ponieważ

$$f'(\sqrt[7]{18}) = \frac{7 \cdot 18^{6/7}}{21} = \sqrt[7]{2^6 \cdot 3^5} = \sqrt[7]{2^6 \cdot 243} < \sqrt[7]{2^6 \cdot 256} = \sqrt[7]{2^6 \cdot 2^8} = \sqrt[7]{2^{14}} = 4 \text{ ,}$$

nierówność (♠) jest udowodniona.

Sposób II:

Dowodzoną nierówność (♠) możemy przepisać w postaci

$$4x^7 - 7x^6 + 12 \geq 0 \text{ ,}$$

co sprowadza się do udowodnienia, że funkcja $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$g(x) = 4x^7 - 7x^6 + 12$$

przyjmuje tylko wartości nieujemne. Ponieważ

$$g'(x) = 28x^6 - 42x^5 = 14x^5 \cdot (2x - 3) \text{ ,}$$

stwierdzamy, że funkcja g' jest ujemna w przedziale $(0, 3/2)$ i dodatnia w przedziale $(3/2, \infty)$. Zatem funkcja g jest malejąca w przedziale $[0, 3/2]$ i rosnąca w przedziale $[3/2, \infty)$, przyjmuje

więc najmniejszą wartość w punkcie $3/2$. Pozostaje wykazać, że $g(3/2) \geq 0$, co robimy następująco:

$$\begin{aligned} g\left(\frac{3}{2}\right) &= 4 \cdot \frac{3^7}{2^7} - 7 \cdot \frac{3^6}{2^6} + 12 = \frac{2 \cdot 3^7 - 7 \cdot 3^6 + 12 \cdot 64}{64} = \frac{6 \cdot 3^6 - 7 \cdot 3^6 + 3 \cdot 256}{64} = \frac{-3^6 + 3 \cdot 256}{64} = \\ &= \frac{-3 \cdot 3^5 + 3 \cdot 256}{64} = \frac{-3 \cdot 243 + 3 \cdot 256}{64} = \frac{3 \cdot 13}{64} > 0. \end{aligned}$$

855. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$2^{1025} \cdot n \leq 2^n + 2^{1035}.$$

Rozwiązanie:
Dowód nierówności podzielimy na dwa przypadki.

Przypadek pierwszy: $n \leq 1024$.

Dla $n \leq 1024$ zachodzą nierówności

$$2^{1025} \cdot n \leq 2^{1025} \cdot 1024 = 2^{1025} \cdot 2^{10} = 2^{1035} < 2^n + 2^{1035},$$
 skąd wynika prawdziwość nierówności danej w zadaniu.

Przypadek drugi: $n \geq 1025$.
Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 1025$ porównujemy lewą i prawą stronę nierówności danej w treści zadania:

$$\begin{aligned} L &= 2^{1025} \cdot 1025, \\ P &= 2^{1025} + 2^{1035} = 2^{1025} + 2^{10} \cdot 2^{1025} = 2^{1025} + 1024 \cdot 2^{1025} = 1025 \cdot 2^{1025}, \end{aligned}$$

skąd $L = P$.

2° Niech $n \geq 1025$ będzie taką liczbą naturalną, że

$$2^{1025} \cdot n \leq 2^n + 2^{1035}.$$

W celu przeprowadzenia zasadniczej części dowodu indukcyjnego chcemy wykazać, że z powyższej nierówności wynika nierówność

$$2^{1025} \cdot (n+1) \leq 2^{n+1} + 2^{1035}.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności i korzystając z założenia indukcyjnego oraz z nierówności $n \geq 1025$ otrzymujemy

$$L = 2^{1025} \cdot (n+1) = 2^{1025} \cdot n + 2^{1025} \leq 2^n + 2^{1035} + 2^{1025} \leq 2^n + 2^{1035} + 2^n = 2^{n+1} + 2^{1035} = P,$$

co kończy dowód indukcyjny.

856. Wyznacz punkt, w którym funkcja f zdefiniowana wzorem

$$f(x)=\frac{x}{40}-\frac{9\cdot\ln(4x^2+1)}{80}+\arctg(2x)$$

osiąga największą wartość na przedziale $[4, 5]$.

Rozwiązanie:

Różniczkujemy funkcję f i korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{40} - \frac{9 \cdot 8x}{80 \cdot (4x^2 + 1)} + \frac{2}{4x^2 + 1} = \frac{4x^2 + 1}{40 \cdot (4x^2 + 1)} - \frac{36x}{40 \cdot (4x^2 + 1)} + \frac{80}{40 \cdot (4x^2 + 1)} = \\ &= \frac{4x^2 - 36x + 81}{40 \cdot (4x^2 + 1)} = \frac{(2x - 9)^2}{40 \cdot (4x^2 + 1)} \geq 0, \end{aligned}$$

przy czym w ostatniej nierówności równość zachodzi tylko dla $x=9/2=4,5$. Ponieważ w interesującym nas przedziale pochodna funkcji f jest dodatnia za wyjątkiem jednego punktu, w którym ma wartość zero, funkcja f jest w tym przedziale rosnąca.

Odpowiedź: Funkcja f osiąga wartość największą na końcu przedziału, czyli w punkcie 5.

857. Udowodnij, że liczba $\log_{490}70$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_{490}70$ jest wymierna i niech będzie ona równa m/n , gdzie m, n są liczbami naturalnymi (**zauważmy, że jest to liczba dodatnia, bo podstawa logarytmu i liczba logarytmowana są większe od 1**). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} \log_{490}70 &= \frac{m}{n}, \\ 490^{m/n} &= 70, \\ 490^m &= 70^n. \end{aligned}$$

Wykażemy, że powyższe równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych m, n .

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy

$$2^m \cdot 5^m \cdot 7^{2m} = 2^n \cdot 5^n \cdot 7^n.$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} m &= n \\ m &= n \\ 2m &= n \end{cases}$$

Jednak powyższy układ równań nie ma rozwiązania w liczbach dodatnich m, n , gdyż dla każdego rozwiązania w liczbach rzeczywistych m, n mamy

$$m = n = 2m,$$

skąd $m = 0$.

Doszliśmy do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{490}70$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{490}70$ jest niewymierna.

Uwaga:

Ponieważ korzystamy z jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze liczb naturalnych, **błędne** jest każde rozwiązanie oparte na rozkładzie, w którym:

- zamiast rozkładu na czynniki pierwsze występuje rozkład z potęgami liczb złożonych, lub
- występują wykładniki, o których nie wiadomo, że są całkowite i nieujemne.

W takim przypadku punktacja będzie bardzo mocno obniżona.

858. Wyznacz (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{\sqrt{n^2+12n+35}-n:n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Rozwiązanie:

Przekształcając wyrażenie definiujące dany w zadaniu zbiór otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+12n+35}-n&=\sqrt{n^2+12n+35}-(n+6)+6=\frac{n^2+12n+35-(n+6)^2}{\sqrt{n^2+12n+35}+(n+6)}+6=\\&=\frac{n^2+12n+35-n^2-12n-36}{\sqrt{n^2+12n+35}+(n+6)}+6=-\frac{1}{\sqrt{n^2+12n+35}+(n+6)}+6.\end{aligned}$$

Z otrzymanej postaci wynika, że podane wyrażenie rośnie wraz z n , a przy $n\rightarrow\infty$ dąży do 6.

Dla zakończenia rozwiązania wystarczy odnotować, że w ciągu rosnącym pierwszy wyraz (tutaj równy $\sqrt{48}-1$) jest najmniejszy, a kresem górnym zbioru wyrazów jest granica ciągu.

Odpowiedź: Kres dolny danego zbioru jest równy $\sqrt{48}-1=4\sqrt{3}-1$, a kres górny 6.

859. Niech funkcja $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x)=9\ln x-\sqrt[10]{x}.$$

Rozstrzygnij, która z liczb jest większa:

$$f\left(10^{20}-2\right)+f\left(10^{20}\right)\qquad\text{czy}\qquad 2\cdot f\left(10^{20}-1\right)?$$

Powyższe liczby $\approx 628,93063347785644624649692368637111473639653590635827137199804$ różnią się na 60-tym miejscu po przecinku.

Rozwiązanie:

Różniczkując dwukrotnie funkcję f otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{9}{x}-\frac{1}{10\cdot x^{9/10}}$$

oraz

$$f''(x)=-\frac{9}{x^2}+\frac{9}{100\cdot x^{19/10}},$$

skąd nierówność $f''(x)<0$ jest równoważna¹ kolejnym nierównościom

$$\begin{aligned}-\frac{9}{x^2}+\frac{9}{100\cdot x^{19/10}}&<0,\\ \frac{9}{100\cdot x^{19/10}}&<\frac{9}{x^2},\end{aligned}$$

¹Przy założeniu $x>0$.

$$x^{1/10} < 100 \, ,$$
$$x < 10^{20} \, .$$

Zatem f jest ściśle wklęsła w przedziale $(0, 10^{20}]$, skąd

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} < f\left(\frac{x+y}{2}\right) \, ,$$

czyli

$$f(x)+f(y) < 2 \cdot f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych dodatnich $x,y \leqslant 10^{20}$.

W szczególności

$$f\left(10^{20}-2\right)+f\left(10^{20}\right) < 2 \cdot f\left(10^{20}-1\right) \, .$$

860. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\sqrt[666]{x^{666}+666} \, .$$

Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych x,y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)| \leqslant |x-y| \, .$$

Rozwiązanie:

Dla $x=y$ dowodzona nierówność jest oczywista, natomiast przy $x\neq y$ z twierdzenia Lagrange’a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x)-f(y)|=|f'(c)|\cdot|x-y| \, ,$$

gdzie c jest pewną liczbą leżącą między x i y .

Rozwiązanie zadania będzie zakończone, jeśli wykazemy, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność

$$|f'(x)| \leqslant 1 \, ,$$

czyli

$$\left|\frac{666\cdot x^{665}}{666\cdot (x^{666}+666)^{665/666}}\right|=\left|\frac{x^{665}}{(x^{666}+666)^{665/666}}\right|\leqslant 1 \, .\tag{\spadesuit}$$

Nierówność $(\spadesuit)$ dowodzimy przez bezpośrednie szacowanie:

$$\frac{|x|^{665}}{(x^{666}+666)^{665/666}}=\frac{(x^{666})^{665/666}}{(x^{666}+666)^{665/666}}<\frac{(x^{666}+666)^{665/666}}{(x^{666}+666)^{665/666}}=1 \, .$$

861. (dla ambitnych) Funkcja ciągła $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia dla każdej liczby rzeczywistej x warunek

$$f(f(f(x))) = x.$$

(3-krotne złożenie jest identycznością)

Udowodnij, że wówczas dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $f(x) = x$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że zgodnie z warunkami zadania funkcja f jest różnowartościowa. Jeżeli bowiem x i y są takimi liczbami, że $f(x) = f(y)$, to

$$x = f(f(f(x))) = f(f(f(y))) = y.$$

Ponieważ ciągła funkcja różnowartościowa określona na przedziale (dziedzinie w jednym kawałku) musi być ściśle monotoniczna, do rozważenia pozostają dwa przypadki:

1° Funkcja f jest malejąca. Wówczas $f \circ f$ jest rosnąca, a $f \circ f \circ f$ malejąca. Jednak funkcja identycznościowa jest rosnąca, więc w tym wypadku $f \circ f \circ f$ nie może być identycznością.

2° Funkcja f jest rosnąca. Jeśli f nie byłaby identycznością, to istniałoby takie x_0 , że $f(x_0) \neq x_0$, przyjmijmy dla ustalenia uwagi, że $f(x_0) > x_0$ – rozważania w przypadku nierówności przeciwnej różnią się tylko kierunkiem nierówności.

Oznaczmy $x_{n+1} = f(x_n)$.

Wówczas

$$x_1 = f(x_0) > x_0.$$

Skoro $x_1 > x_0$, a funkcja f jest rosnąca, to

$$x_2 = f(x_1) > f(x_0) = x_1 > x_0.$$

Analogicznie z nierówności $x_2 > x_1$ wynika

$$x_3 = f(x_2) > f(x_1) = x_2 > x_1 > x_0.$$

Otrzymaliśmy więc nierówność $x_3 > x_0$, sprzeczną z warunkami zadania, które mówią, że

$$x_3 = f(f(f(x_0))) = x_0.$$

862. (dla ambitnych) Funkcja $f \in C^3(\mathbb{R})$ (tzn. mająca na całej prostej ciągłe pochodne do trzeciego rzędu włącznie) spełnia dla każdej liczby rzeczywistej x warunek $f'''(x) > 0$. Udowodnij, że wówczas

$$f(0) + 3f(2) < 3f(1) + f(3).$$

Wskazówka: Zbadaj wypukłość/wklęsłość funkcji $g(x) = f(x+1) - f(x)$.

Rozwiązanie:

Ponieważ funkcja f''' jest dodatnia, funkcja f'' jest rosnąca. Zatem

$$g''(x) = f''(x+1) - f''(x) > 0,$$

skąd wynika, że funkcja g jest ściśle wypukła.

Wobec tego dla różnych liczb rzeczywistych x i y zachodzi nierówność

$$g(x) + g(y) > 2 \cdot g\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

W szczególności dla $x = 0$ i $y = 2$ otrzymujemy

$$g(0) + g(2) > 2 \cdot g(1),$$

co po skorzystaniu z definicji funkcji g prowadzi kolejno do:

$$\begin{aligned} f(1) - f(0) + f(3) - f(2) &> 2f(2) - 2f(1), \\ 3f(1) + f(3) &> f(0) + 3f(2), \end{aligned}$$

a to jest nierówność, którą należało udowodnić.

Uwaga:

Chociaż czynnik 3 występujący po obu stronach dowodzonej nierówności wygląda na wzięty z sufitu, to jest on nienegocjowalny (trójkąt Pascala). Mamy bowiem (przy $a > 0$):

Wyrażenie	Kiedy zawsze zerowe?	Kiedy na pewno dodatnie?
$f(x)$	funkcja zerowa, $f = 0$	funkcja dodatnia
$f(x+a) - f(x)$	funkcja stała, $f' = 0$	funkcja rosnąca, $f' > 0$
$f(x+2a) - 2f(x+a) + f(x)$	funkcja liniowa, $f'' = 0$	funkcja ściśle wypukła, $f'' > 0$
$f(x+3a) - 3f(x+2a) +$ $+3f(x+a) - f(x)$	wielomian stopnia ≤ 2 , $f''' = 0$	$f''' > 0$
$f(x+4a) - 4f(x+3a) +$ $+6f(x+2a) - 4f(x+a) + f(x)$	wielomian stopnia ≤ 3 , $f^{(4)} = 0$	$f^{(4)} > 0$
$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot (-1)^k \cdot f\left(x + (n-k)a\right)$	wielomian stopnia $\leq n-1$, $f^{(n)} = 0$	$f^{(n)} > 0$

- 863.** Podaj kres górny zbioru.
- a) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 8^{m^3} \leq 27^{n^3} \right\} = \sqrt[3]{\log_8 27} = \boxed{\sqrt[3]{\log_2 3} \text{ +1 punkt}};$
 - b) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3^{m^2} \leq 81^{n^2} \right\} = \mathbf{2};$
 - c) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^{m^3} \leq 32^{n^3} \right\} = \sqrt[3]{5};$
 - d) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 9^{m^2} \leq 49^{n^2} \right\} = \sqrt{\log_9 49} = \boxed{\sqrt{\log_3 7} \text{ +1 punkt}}.$

- 864.** Zapisz w postaci przedziału dziedzinę funkcji f określonej podanym wzorem.
- a) $f(x) = \sqrt{\log_2 \log_2 \log_3 x}, \quad D_f = [\mathbf{9}, \infty);$
 - b) $f(x) = \sqrt{\log_3 \log_3 \log_2 x}, \quad D_f = [\mathbf{8}, \infty);$
 - c) $f(x) = \sqrt{\log_5 \log_4 \log_3 x}, \quad D_f = [\mathbf{81}, \infty);$
 - d) $f(x) = \sqrt{\log_7 \log_5 \log_2 x}, \quad D_f = [\mathbf{32}, \infty).$

- 865.** Dla podanej liczby k podaj taką liczbę naturalną $n > k$, że $\binom{n}{k} = \binom{n}{4k}$.
- a) $k = 4, \quad n = \mathbf{20};$
 - b) $k = 5, \quad n = \mathbf{25};$
 - c) $k = 10, \quad n = \mathbf{50};$
 - d) $k = 111, \quad n = \mathbf{555}.$

- 866.** Podaj wzór na pochodną funkcji.
- a) $\frac{d}{dx} \ln(e^{2x} + x^7) = \frac{\mathbf{2e^{2x} + 7x^6}}{\mathbf{e^{2x} + x^7}};$
 - b) $\frac{d}{dx} \ln \cos x = -\frac{\sin x}{\cos x} = \boxed{-\operatorname{tg} x \text{ +1 punkt}};$
 - c) $\frac{d}{dx} \operatorname{arctg}(x \cdot \sqrt{x}) = \frac{\mathbf{3 \cdot \sqrt{x}}}{\mathbf{2 \cdot (x^3 + 1)}};$
 - d) $\frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt[4]{5x^5 + 1}} = -\frac{\mathbf{25x^4}}{\mathbf{4 \cdot (5x^5 + 1)^{5/4}}}.$

- 867.** Podaj wartość granicy.
- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1 + 2x)} = \mathbf{1/2};$
 - b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(1 + 4x)} = \mathbf{1/2};$
 - c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{\ln(1 + 6x)} = \mathbf{2/3};$
 - d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{16x} - 1}{\ln(1 + 8x)} = \mathbf{2}.$

- 868.** Niech x_k będzie taką liczbą, że punkt (x_k, x_k) leży na prostej stycznej w punkcie (k, k^2) do paraboli o równaniu $y = x^2$. Wówczas:
- a) $x_5 = \mathbf{25/9};$
 - b) $x_2 = \mathbf{4/3};$
 - c) $x_3 = \mathbf{9/5};$
 - d) $x_4 = \mathbf{16/7}.$

869. Podaj liczbę podzbiorów A zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ spełniających warunki $\forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (n+2) \in A)$ oraz

a) $10, 15 \in A$ **40**;

b) $11, 16 \in A$ **48**;

c) $12, 17 \in A$ **54**;

d) $13, 18 \in A$ **63**.

870. Niech g będzie funkcją odwrotną do funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem $f(x) = x^3 + 5x + 3$. Podaj wartość pochodnej.

a) $g'(3) = \mathbf{1/5}$;

b) $g'(9) = \mathbf{1/8}$;

c) $g'(21) = \mathbf{1/17}$;

d) $g'(45) = \mathbf{1/32}$.

871. Niech $f(x) = x^{100} \cdot e^{x^{33}}$. Podaj wartość pochodnej danego rzędu.

a) $f^{(199)}(0) = \mathbf{199!/3!} = \mathbf{199!/6}$;

b) $f^{(430)}(0) = \mathbf{430!/10!}$;

c) $f^{(463)}(0) = \mathbf{463!/11!}$;

d) $f^{(760)}(0) = \mathbf{760!/20!}$.

872. Niech

$$G(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n^2+n+2} + \frac{n+4}{n^2+n+4} + \dots + \frac{n+2k}{n^2+n+2k} + \dots + \frac{pn}{n^2+pn} \right).$$

Wówczas

a) $G(3) = \mathbf{2}$;

b) $G(5) = \mathbf{6}$;

c) $G(7) = \mathbf{12}$;

d) $G(9) = \mathbf{20}$.

873. Podaj sumę szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{80^n} = \mathbf{1/79}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{80^n} = \mathbf{-1/81}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^4}}{99^n} = \mathbf{-1/100}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3^n}}{99^n} = \mathbf{-1/98}$.

874. Podaj sumę szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{n+48}{n}} - \sqrt{\frac{n+49}{n+1}} \right) = \mathbf{6}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{n+48}{n}} - \sqrt{\frac{n+50}{n+2}} \right) = \mathbf{10}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{n+48}{n}} - \sqrt{\frac{n+51}{n+3}} \right) = \mathbf{9 + \sqrt{17}}$;

d) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{n+48}{n}} - \sqrt{\frac{n+49}{n+1}} \right) = \mathbf{4}$.

875. Podaj kres górny zbioru.

Przypomnienie: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

a) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^{m^4} \leq 16^{n^4} \right\} = \sqrt[4]{4} = \boxed{\sqrt{2} \text{ +1 punkt}};$

b) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 32^{m^3} \leq 128^{n^3} \right\} = \sqrt[3]{7/5};$

c) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 25^{m^2} \leq 64^{n^2} \right\} = \sqrt{\log_{25} 64} = \boxed{\sqrt{\log_5 8} \text{ +1 punkt}};$

d) $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 27^{m^3} \leq 64^{n^3} \right\} = \sqrt[3]{\log_{27} 64} = \boxed{\sqrt[3]{\log_3 4} \text{ +1 punkt}}.$

- 876.** Zapisz w postaci sumy przedziałów dziedzinę funkcji f określonej podanym wzorem.
- a) $f(x) = \sqrt{\log_{11}\log_6|\log_2x|}$, $D_f = (0, 1/64] \cup [64, \infty)$;
 - b) $f(x) = \sqrt{\log_{13}\log_2|\log_7x|}$, $D_f = (0, 1/49] \cup [49, \infty)$;
 - c) $f(x) = \sqrt{\log_{17}\log_2|\log_5x|}$, $D_f = (0, 1/25] \cup [25, \infty)$;
 - d) $f(x) = \sqrt{\log_{19}\log_7|\log_2x|}$, $D_f = (0, 1/128] \cup [128, \infty)$.
- 877.** Dla podanej liczby k podaj taką liczbę naturalną $n > k$, że $\binom{n}{k} = \binom{n}{k^3}$.
- a) $k = 2$, $n = \mathbf{10}$;
 - b) $k = 3$, $n = \mathbf{30}$;
 - c) $k = 4$, $n = \mathbf{68}$;
 - d) $k = 5$, $n = \mathbf{130}$.
- 878.** Dla podanej funkcji f podaj wartość parametru a , dla której funkcja f jest ciągła.
Przypomnienie: $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x .
- a) $f(x) = a \cdot \{x\} - \sin\left(\frac{\pi \cdot \{x\}}{2}\right)$, $a = \mathbf{1}$;
 - b) $f(x) = a \cdot \{x\} - \sin\left(\frac{\pi \cdot \{x\}}{3}\right)$, $a = \mathbf{\sqrt{3}/2}$;
 - c) $f(x) = a \cdot \{x\} - \sin\left(\frac{\pi \cdot \{x\}}{4}\right)$, $a = \mathbf{\sqrt{2}/2}$;
 - d) $f(x) = a \cdot \{x\} - \sin\left(\frac{\pi \cdot \{x\}}{6}\right)$, $a = \mathbf{1/2}$.
- 879.** Niech $f(x) = x \cdot \sqrt{x}$. Podaj wzór na pochodną danego rzędu.
- a) $f'(x) = \frac{\mathbf{3 \cdot \sqrt{x}}}{2}$;
 - b) $f''(x) = \frac{\mathbf{3}}{4 \cdot \sqrt{x}}$;
 - c) $f'''(x) = -\frac{\mathbf{3}}{8 \cdot x^{3/2}}$;
 - d) $f^{(4)}(x) = \frac{\mathbf{9}}{16 \cdot x^{5/2}}$.
- 880.** Niech $f(x) = x \cdot \sqrt[3]{x}$. Podaj wzór na pochodną danego rzędu.
- a) $f^{(4)}(x) = \frac{\mathbf{40}}{81 \cdot x^{8/3}}$;
 - b) $f'''(x) = -\frac{\mathbf{8}}{27 \cdot x^{5/3}}$;
 - c) $f''(x) = \frac{\mathbf{4}}{9 \cdot x^{2/3}}$;
 - d) $f'(x) = \frac{\mathbf{4 \cdot \sqrt[3]{x}}}{3}$.
- 881.** Niech x_k będzie taką liczbą, że punkt (x_k, x_k) leży na prostej stycznej w punkcie (k, k^3) do krzywej o równaniu $y = x^3$. Wówczas:
- a) $x_2 = \mathbf{16/11}$;
 - b) $x_3 = \mathbf{27/13}$;
 - c) $x_4 = \mathbf{128/47}$;
 - d) $x_{10} = \mathbf{2000/299}$.
- 882.** Niech g będzie funkcją odwrotną do funkcji $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem $f(x) = \sqrt{x} + 1$. Podaj wartość pochodnej.
- a) $g'(5) = \mathbf{8}$;
 - b) $g'(10) = \mathbf{18}$;
 - c) $g'(65) = \mathbf{128}$;
 - d) $g'(101) = \mathbf{200}$.

883. Niech

$$G(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+p}{n^2+n+p} + \frac{n+2p}{n^2+n+2p} + \dots + \frac{n+kp}{n^2+n+kp} + \dots + \frac{7n}{n^2+7n} \right).$$

Wówczas

a) $G(1) = \mathbf{24}$; b) $G(2) = \mathbf{12}$; c) $G(3) = \mathbf{8}$; d) $G(6) = \mathbf{4}$.

884. Niech $f(x) = x^{333} \cdot e^{x^{100}}$. Podaj wartość pochodnej danego rzędu.

a) $f^{(1333)}(0) = \mathbf{1333! / 10!}$; b) $f^{(2333)}(0) = \mathbf{2333! / 20!}$;
c) $f^{(3333)}(0) = \mathbf{3333! / 30!}$; d) $f^{(4333)}(0) = \mathbf{4333! / 40!}$.

885. Podaj sumę szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^{26}}}{26^n} = \mathbf{-1/27}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{26^n}}{26^n} = \mathbf{1/25}$;
c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^{25}}}{26^n} = \mathbf{-1/27}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{25^n}}{26^n} = \mathbf{-1/25}$.

886. Podaj sumę szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+3} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+4} \right) = \mathbf{16 - e}$;
b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+2} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+3} \right) = \mathbf{8 - e}$;
c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \right) = \mathbf{4 - e}$;
d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \right) = \mathbf{2 - e}$.

887. (dla ambitnych) Podaj kresy zbioru $Z(A, B) = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^{A^m} = 4^{B^n} \right\}$.

a) $\inf Z(16, 32) = \mathbf{5/4}$, $\sup Z(16, 32) = \mathbf{4/3}$;
b) $\inf Z(8, 16) = \mathbf{4/3}$, $\sup Z(8, 16) = \mathbf{3/2}$;
c) $\inf Z(64, 128) = \mathbf{7/6}$, $\sup Z(64, 128) = \mathbf{6/5}$;
d) $\inf Z(32, 64) = \mathbf{6/5}$, $\sup Z(32, 64) = \mathbf{5/4}$.

888. (dla ambitnych) To samo, co w poprzednim zadaniu.

a) $\inf Z(32, 128) = \mathbf{7/5}$, $\sup Z(32, 128) = \mathbf{3/2}$;
b) $\inf Z(128, 16) = \mathbf{4/7}$, $\sup Z(128, 16) = \mathbf{3/5}$;
c) $\inf Z(128, 32) = \mathbf{5/7}$, $\sup Z(128, 32) = \mathbf{3/4}$;
d) $\inf Z(8, 128) = \mathbf{7/3}$, $\sup Z(8, 128) = \mathbf{5/2}$.